

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifiez toutes vos réponses.

Durée : 30 minutes

NOM :

PRÉNOM :

8

Exercice 1

Rappeler les tables de vérité des formules propositionnelles ($\text{non } p$), (p ou q), (p et q). Qu'appelle-t-on *principe de contraposition*? Vous énoncerez ce principe puis le démontrerez.

p	q	$\text{non } p$	p ou q	p et q
1	1	0	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	1	0
0	0	1	0	0

1
1,5
1,5

Principe de contraposition : $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\text{non } q \Rightarrow \text{non } p)$ 2

p	q	$\text{non } p$	$\text{non } q$	$p \Rightarrow q$	$\text{non } q \Rightarrow \text{non } p$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\text{non } q \Rightarrow \text{non } p)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

2

6

Exercice 2

Considérons la formule mathématique p :

$$\exists x \in \mathbf{R} \forall y \in \mathbf{R} (x \geq y^2 \text{ ou } y^4 \geq x^3).$$

Cette formule est-elle vraie ou fausse? Justifier la réponse. Donner la négation de la formule p .

3 Cette formule est vraie. En effet, posons $x=0$.
Alors $\forall y \in \mathbf{R}, y^4 \geq x$.
A fortiori, $\forall y \in \mathbf{R}, x \geq y^2$ ou $y^4 \geq x^3$.

3 non p : $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, x < y^2$ et $y^4 < x^3$

6

Exercice 3

Considérons la formule mathématique p :

$$(\exists x \in \mathbf{R} (x = 0 \text{ et } x \neq 0))$$

et la formule mathématique q :

$$((\exists x \in \mathbf{R} x = 0) \text{ et } (\exists x \in \mathbf{R} x \neq 0)).$$

Les formules p et q sont-elles équivalentes ? La formule p implique-t-elle la formule q ? La formule q implique-t-elle la formule p ? Justifier les réponses.

1,5 • La formule p est fautive. En effet, $x=0$ et $x \neq 0$ est une contradiction.

1,5 • Les formules $\exists x \in \mathbf{R} x=0$, et $\exists x \in \mathbf{R} x \neq 0$ sont toutes les deux vraies, donc leur conjonction q est vraie.

1 p est fautive et q vraie, donc p et q ne sont pas équivalentes.

1 p implique q

1 q n'implique pas p .