UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Arithmétique 1

Interrogation n°3 : mardi 19 octobre 2010

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifiez toutes vos réponses.

Durée : 30 minutes

NOM :
PRÉNOM : CORRIGÉ

7

Exercice 1

1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = -1$.

a) Donner, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la valeur de u_n en fonction de n.

2 $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -1 + 3n$

b) Calculer u_{50}.

1 $u_{50} = 149$

2 Soit f une application d'un ensemble A dans un ensemble B, et soit X une partie de B. Donner la définition de $f^{-1}(X)$.

2 $f^{-1}(X) = \{x \in A \mid f(x) \in X\}$

3 Soit f une application d'un ensemble A sur un ensemble B. Donner la définition de « f est surjective ».

2 f est surjective si et seulement si $\forall b \in B,\ \exists a \in A,\ b = f(a)$.

6

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^3 = 0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3.$$

Le but de l'exercice est de démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

1,5 **1** Écrire l'hypothèse de récurrence.

1,5 **2** Pour tout $n \in \mathbf{N}$, exprimer S_{n+1} en fonction de S_n et de n.

3 **3** Démontrer le résultat.

1) $\mathcal{P}(n)$: $S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} = S_n + (n+1)^3$

3) • $\mathcal{P}(0)$ est vraie. En effet, $S_0 = 0^3 = 0 = \dfrac{0^2(0+1)^2}{4}$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.
Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$S_{n+1} = S_n + (n+1)^3$ d'après 2)

$S_{n+1} = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$ par hypothèse de récurrence

$= \dfrac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4}$

$S_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

7 **Exercice 3**

3 **1** Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n^3 - n$ est un multiple de 3. (On précisera l'hypothèse de récurrence utilisée.)

2 Pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons $a_n = 3^{2n+2} - 2^{n+1}$.

2 **a)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_{n+1} = 2a_n + 7 \cdot 3^{2n+2}$.

2 **b)** Montrer par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est un multiple de 7. (On précisera l'hypothèse de récurrence utilisée.)

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$: " $n^3 - n$ est un multiple de 3. "

Montrons par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie, car $0 = 0 \times 3$ est un multiple de 3.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

Alors $(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + \cancel{1} - n + \cancel{1}$

$= n^3 - n + 3(n^2 + n)$

$n^3 - n$ est un multiple de 3 par hypothèse de récurrence, donc $(n+1)^3 - (n+1)$ est un multiple de 3 (comme somme de deux multiples de 3).

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

2) a. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$a_{n+1} = 3^{2(n+1)+2} - 2^{n+1+1}$

$= 3^{2n+2} \cdot 3^2 - 2 \cdot 2^{n+1}$

$= 3^{2n+2}(7 + 2) - 2 \cdot 2^{n+1}$

$$a_{n+1} = 2\left(3^{2n+2} - 2^{n+1}\right) + 7.3^{2n+2}$$

$$a_{n+1} = 2a_n + 7.3^{2n+2}$$

b- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}'(n)$ l'assertion "a_n est un multiple de 7".

- $\mathcal{P}'(0)$ est vraie, car $a_0 = 9 - 2 = 7$ est un multiple de 7.

- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}'(n)$ vraie.

$a_{n+1} = 2a_n + 7.3^{2n+2}$ d'après a-

Or a_n est un multiple de 7 car $\mathcal{P}'(n)$ est vraie, donc a_{n+1} est un multiple de 7, c'est-à-dire $\mathcal{P}'(n+1)$ est vraie.

- Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
  $a_n = 3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est un multiple de 7.