UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Arithmétique 1

Corrigé du devoir à la maison

Exercice 1

Soit A une partie d'un ensemble E, on appelle fonction caractéristique de A l'application $f_A : E \to \{0,1\}$ définie par

$$f_A(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \notin A \\ 1 & si\ x \in A \end{cases}$$

Soit A et B deux parties de E, f_A et f_B leurs fonctions caractéristiques.

(1) *Montrer que pour tout $x \in E$ on a la relation $1 - f_A(x) = f_{\complement_E A}(x)$ où $\complement_E A$ est le complémentaire de A dans E.*
Soit $x \in E$. Supposons d'abord qu'on a $x \in A$. Alors on a $x \notin \complement_E A$. Par suite on a

$$1 - f_A(x) = 0 = f_{\complement_E A}(x).$$

Si maintenant on a $x \notin A$, c'est-à-dire $x \in \complement_E A$, on a

$$1 - f_A(x) = 1 = f_{\complement_E A}(x).$$

La relation demandée est donc bien vérifiée pour tout $x \in E$.
(2) *Montrer que pour tout $x \in E$ on a la relation $f_A(x)f_B(x) = f_{A\cap B}(x)$.*
Soit $x \in E$. Supposons d'abord qu'on a $x \in A \cap B$. Alors $x \in A$ et $x \in B$, et on a

$$f_A(x)f_B(x) = 1.1 = 1 = f_{A\cap B}(x).$$

Supposons à présent qu'on a $x \notin A \cap B$. Alors $x \notin A$ ou $x \notin B$, donc $f_A(x) = 0$ ou $f_B(x) = 0$, et dans tous les cas on a

$$f_A(x)f_B(x) = 0 = f_{A\cap B}(x).$$

La relation demandée est donc bien vérifiée pour tout $x \in E$.
(3) *Montrer que pour tout $x \in E$ on a la relation $f_A(x)+f_B(x)-f_A(x)f_B(x) = f_{A\cup B}(x)$.*
Supposons d'abord qu'on a $x \in A \cap B$. Alors $x \in A$, $x \in B$, et $x \in A \cup B$ et on a

$$f_A(x) + f_B(x) - f_A(x)f_B(x) = 1 + 1 - 1 = 1 = f_{A\cup B}(x).$$

Supposons ensuite qu'on a $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$. Alors $x \in A$ et $x \notin B$, soit $x \notin A$ et $x \in B$. Dans les deux cas $x \notin A \cap B$ et on a

$$f_A(x) + f_B(x) - f_A(x)f_B(x) = 1 + 0 - 0 = 1 = f_{A\cup B}(x).$$

Supposons enfin qu'on a $x \notin A \cup B$. Alors $x \notin A$ et $x \notin B$, et on a

$$f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) f_B(x) = 0 + 0 - 0 = 0 = f_{A \cup B}(x).$$

La relation demandée est donc bien vérifiée pour tout $x \in E$.
(4) *Montrer que pour tout $x \in E$ on a la relation $f_A(x)+f_B(x)-2f_A(x)f_B(x) = f_{A\Delta B}(x)$ où $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.*
On a $A \setminus B = A \cap \complement_E B$. D'après les deux premières questions, on a donc pour tout $x \in E$ $f_{A\setminus B}(x) = f_A(x)(1 - f_B(x))$. De même on a $f_{B\setminus A}(x) = f_B(x)(1 - f_A(x))$. Par ailleurs, $A \setminus B$ et $B \setminus A$ sont disjoints, donc d'après la question 2 on a pour tout $x \in E$ $f_{A\setminus B}(x).f_{B\setminus A}(x) = f_\emptyset(x) = 0$. D'après la question précédente, on a alors pour tout $x \in E$

$$\begin{aligned} f_{A\Delta B}(x) &= f_{A\setminus B}(x) + f_{B\setminus A}(x) - f_{A\setminus B}(x).f_{B\setminus A}(x) \\ &= f_A(x)(1 - f_B(x)) + f_B(x)(1 - f_A(x)) \\ &= f_A(x) + f_B(x) - 2\, f_A(x)\, f_B(x). \end{aligned}$$

Exercice 2

(1) *Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\sum_{k=0}^{n} = \frac{n(n+1)}{2}$.*

Considérons, pour $n \in \mathbb{N}$, l'assertion

$$\mathscr{H}_n \,:\, \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Montrons que $\mathscr{H}_0$ est vraie. On a $\sum_{k=0}^{0} k = 0$. Par ailleurs $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{0(0+1)}{2} = 0$. Donc $\mathscr{H}_0$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{H}_n$ est vraie. Montrons que $\mathscr{H}_{n+1}$ l'est encore. On a

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right) + n + 1.$$

D'après $\mathscr{H}_n$, on a donc

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Ainsi $\mathscr{H}_{n+1}$ est encore vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{H}_n$ est vraie.
(2) *Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer en développant $(k+1)^3$ la quantité suivante :*

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 - \sum_{k=0}^{n} (k+1)^3.$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 - \sum_{k=0}^{n}(k+1)^3 &= (n+1)^3 - 1 + \sum_{k=1}^{n}(k^3 - (k+1)^3) \\
&= (n+1)^3 - 1 + \sum_{k=1}^{n}(k^3 - k^3 - 3\,k^2 - 3\,k - 1) \\
&= (n+1)^3 - 1 - \sum_{k=1}^{n}(3\,k^2 + 3\,k + 1) \\
&= (n+1)^3 - 1 - 3\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + 3\left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la question précédente, on a

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 - \sum_{k=0}^{n}(k+1)^3 = (n+1)^3 - 1 - 3\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + 3\,\frac{n(n+1)}{2} - n.$$

(on pourrait dès à présent simplifier l'expression du second membre, mais ce sera fait à la question suivante de toute façon).

(3) *En déduire que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a :* $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n)$.

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3 &= (0+1)^3 + (1+1)^3 + \cdots + (n-1+1)^3 + (n+1)^3 \\
&= 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} k^3
\end{aligned}$$

(si l'on veut le montrer de manière moins informelle, on effectue le changement de variable $\ell = k+1$ dans la somme $\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3$) d'où

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 - \sum_{k=0}^{n}(k+1)^3 = 0.$$

D'après le calcul effectué à la question précédente, on a donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - 1 - 3\,\frac{n(n+1)}{2} - n\right) &= \frac{1}{6}\left(2\,n^3 + 6\,n^2 + 6\,n + 2 - 2 - 3\,n^2 - 3\,n - 2\,n\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(2\,n^3 + 3\,n^2 + n\right).
\end{aligned}$$

Exercice 3

(1) *On rappelle que pour $n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$ et $a, b \in \mathbb{R}$ on a :*

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!} \qquad et \qquad (a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \, a^p \, b^{n-p} \, .$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la formule du binôme ci-dessus, démontrer que

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$$

Appliquons la formule du binôme avec $a = b = 1$. On trouve

$$2^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \, 1^p . 1^{n-p} = \sum_{p=0}^{n} C_n^p = C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n.$$

(2) *Calculer de même $\sum\limits_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p$.*

Appliquons la formule du binôme avec $a = 1$ et $b = -1$. On trouve, dans le cas où n est *non nul*,

$$(1-1)^n = 0 = \sum_{p=0}^{n} C_n^p (-1)^p.$$

Si $n = 0$, on a $\sum\limits_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p = 1$.

(3) *Calculer*

$$\sum_{p=1}^{n} p \, C_n^p \qquad et \qquad \sum_{p=2}^{n} p(p-1) \, C_n^p.$$

En déduire la valeur de

$$\sum_{p=1}^{n} p^2 \, C_n^p.$$

On suppose $n \geq 1$. Pour $p \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$p \, C_n^p = p . \frac{n!}{p! \, (n-p)!} = \frac{n.(n-1)!}{(p-1)! \, (n-1-(p-1))!} = n \, C_{n-1}^{p-1}$$

d'où

$$\sum_{p=1}^{n} p \, C_n^p = n \sum_{p=1}^{n} C_{n-1}^{p-1} = n \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-1}^p.$$

Ainsi d'après la première question on a $\sum\limits_{p=1}^{n} p \, C_n^p = n \, 2^{n-1}$. Si $n = 0$, $\sum\limits_{p=1}^{n} p \, C_n^p$ est la « somme vide », qui vaut 0 (et donc la relation ci-dessus est encore vraie) ; on peut aussi remarquer qu'on a pour $n \geq 1$ la relation $\sum\limits_{p=1}^{n} p \, C_n^p = \sum\limits_{p=0}^{n} p \, C_n^p$ et que pour $n = 0$ cette dernière expression vaut 0.

Supposons à présent $n \geq 2$. Pour $p \in \{2, \dots, n\}$, on a

$$p(p-1)\, C_n^p = p(p-1).\frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n.(n-1).(n-2)!}{(p-2)!\,(n-1-(p-2))!} = n(n-1)\, C_{n-2}^{p-2}$$

d'où

$$\sum_{p=2}^{n} p(p-1)\, C_n^p = n(n-1) \sum_{p=2}^{n} C_{n-1}^{p-1} = n \sum_{p=0}^{n-2} C_{n-2}^p.$$

Ainsi d'après la première question on a

$$\sum_{p=2}^{n} p(p-1)\, C_n^p = n(n-1)\, 2^{n-2}.$$

Si $n \in \{0, 1\}$, on a $\sum\limits_{p=2}^{n} p(p-1)\, C_n^p = 0$ et la relation précédente est encore vraie.

On a par ailleurs pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{p=2}^{n} p(p-1)\, C_n^p = \sum_{p=1}^{n} p(p-1)\, C_n^p = \sum_{p=1}^{n} p^2\, C_n^p - \sum_{p=1}^{n} p\, C_n^p = \sum_{p=1}^{n} p^2 C_n^p - \sum_{p=1}^{n} p\, C_n^p$$

d'où

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^{n} p^2\, C_n^p &= \sum_{p=1}^{n} p(p-1)\, C_n^p + \sum_{p=1}^{n} p\, C_n^p \\
&= n(n-1)2^{n-2} + n.2^{n-1} \\
&= 2^{n-2}\,(2\,n + n(n-1)) \\
&= 2^{n-2}\, n(n+1).
\end{aligned}$$

(4) *Retrouver la question précédente en dérivant (une puis deux fois) la fonction* $x \in \mathbb{R} \mapsto (1+x)^n$.

Notons f_n la fonction en question. On a, si $n \geq 1$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n'(x) = n\,(1+x)^{n-1}$$

et, si $n \geq 2$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n''(x) = n(n-1)\,(1+x)^{n-2}.$$

Par ailleurs on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p x^p.$$

d'où on déduit les relations

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n'(x) = \sum_{p=1}^{n} C_n^p p\, x^{p-1}$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n''(x) = \sum_{p=2}^{n} C_n^p p(p-1)\, x^{p-2}.$$

On en déduit en comparant les expression obtenues, pour $n \geq 1$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{p=1}^{n} C_n^p\, p\, x^{p-1} = n\,(1+x)^{n-1} \quad (*)$$

et pour $n \geq 2$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{p=2}^{n} C_n^p\, p(p-1)\, x^{p-1} = n(n-1)\,(1+x)^{n-2} \quad (**).$$

En écrivant les relations $(*)$ et $(**)$ pour $x = 1$, on retrouve bien les résultats de la question précédente (les cas $n = 0$ pour la première formule et $n \in \{0, 1\}$ pour la seconde peuvent se traiter de la même façon, il faut simplement faire attention à l'expression de la dérivée).

Exercice 4

On rappelle qu'une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur un ensemble $\mathcal{M}$ est une relation binaire vérifiant pour tout $a, b, c \in \mathcal{M}$:
(i) $a\mathcal{R}a$,
(ii) ($a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}a$)$\Rightarrow a = b$,
(iii) ($a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}c$)$\Rightarrow a\mathcal{R}c$.

Soient E un ensemble et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
(1) *Montrer que la relation $A \subset B$, $A, B \in \mathcal{P}(E)$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$.*

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Tout élément de A est un élément de A (!), ainsi on a $A \subset A$ et donc (i) est vérifiée.

Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$ tels que $A \subset B$ et $B \subset A$. Ainsi tout élément de A est un élément de B, et réciproquement. Donc A et B ont les mêmes éléments, c'est-à-dire on a $A = B$. Ainsi (ii) est vérifiée.

Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$ tels que $A \subset B$ et $B \subset C$. Montrons qu'on a $A \subset C$. Soit x un élément de A. Comme on a $A \subset B$, x est un élément de B. Comme on a $B \subset C$, x est un élément de C. Ainsi tout élément de A est un élément de C, donc on a $A \subset C$ et (iii) est vérifiée.

Ainsi, $\subset$ est bien une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$.

(2) *Trouver le plus petit majorant et le plus grand minorant de $\{A, B\}$ pour $A, B \in \mathcal{P}(E)$.*

Soit $C \in \mathcal{P}(E)$ qui est majorant de $\{A, B\}$. Cela signifie qu'on a $A \subset C$ et $B \subset C$. En particulier, on a $A \cup B \subset C$. Réciproquement, si on a $A \cup B \subset C$, comme A et B sont inclus dans $A \cup B$, par transitivité de l'inclusion (propriété (iii)) on a bien $A \subset C$ et $B \subset C$. Finalement on a montré :

$$\forall C \in \mathcal{P}(E), \quad C \text{ est un majorant de } \{A, B\} \iff A \cup B \subset C$$

On en déduit que le plus petit majorant de $\{A, B\}$ est $A \cup B$.

De manière similaire, on montre la propriété

$$\forall C \in \mathcal{P}(E), \quad C \text{ est un minorant de } \{A, B\} \Longleftrightarrow C \subset A \cap B$$

On en déduit que le plus grand minorant de $\{A, B\}$ est $A \cap B$.