UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et Arithmétique 1

Interrogation n°4 : mardi 9 novembre 2010

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Justifiez toutes vos réponses.

Durée : 30 minutes

NOM :
PRÉNOM : CORRIGÉ

Exercice 1

1. Donner la table de vérité de « $\mathscr{P} \Rightarrow \mathscr{Q}$ ».

$\mathcal{P}$	q	$\mathcal{P} \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

2. (a) Soit X un ensemble fini de cardinal n. Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(X)$, l'ensemble des parties de X ?

On a $\text{Card}\,\mathcal{P}(X) = 2^{\text{Card}\,X}$.

(b) Soit $X = \{1, 2, 3\}$. Donner la liste de tous les éléments de $\mathcal{P}(X)$. Le résultat est-il compatible avec la réponse à la question (a) ?

On a $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.
On trouve bien $8 = 2^3 = 2^{\text{Card}\,X}$ éléments, ce qui est compatible avec l'égalité annoncée à la question (a).

3. Pour $a, b \in \mathbb{C}$, développez $(a-b)^5$.

On a $(a-b)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} a^k (-b)^{5-k}$ d'après la formule du binôme de Newton

$= -b^5 + 5ab^4 - 10a^2b^3 + 10a^3b^2 - 5a^4b + a^5$.

Exercice 2

On considère une population de 100 personnes, parmi lesquelles 95 possèdent un téléphone portable, 60 un ordinateur portable et 75 un baladeur numérique.

1. Quel est le nombre minimum de ces personnes possédant un téléphone portable et un baladeur numérique ? Indication : on pourra utiliser la formule d'inclusion-exclusion.
2. Quel est le nombre minimum de ces personnes possédant un ordinateur portable, un téléphone portable et un baladeur numérique ? Indication : on pourra utiliser le résultat de la question précédente.

Notons : E la population de 100 personnes considérée

T l'ensemble des personnes de E qui ont un téléphone portable

L l'ensemble des personnes de E qui ont un ordinateur portable

B l'ensemble des personnes de E qui ont un baladeur numérique.

D'après l'énoncé, on a $\operatorname{card} E = 100$, $\operatorname{card} T = 95$, $\operatorname{card} L = 60$, $\operatorname{card} B = 75$.

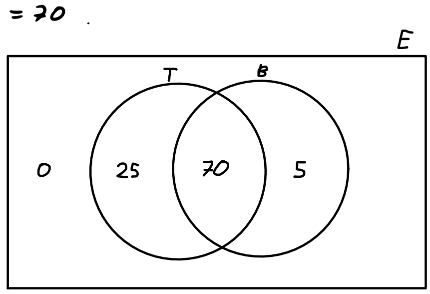
1- D'après la formule d'inclusion-exclusion, on a

$\operatorname{card}(T \cap B) = \operatorname{card} T + \operatorname{card} B - \operatorname{card}(T \cup B)$,

or $T \cup B \subset E$ donc $\operatorname{card}(T \cup B) \leq \operatorname{card} E$,

donc $\operatorname{card}(T \cap B) \geq \operatorname{card} T + \operatorname{card} B - \operatorname{card} E = 95 + 75 - 100 = 70$.

Ce minorant est atteint, dans la situation suivante :



Le nombre minimum de personnes possédant un téléphone portable et un baladeur numérique est donc 70.

2- D'après la formule d'inclusion-exclusion, on a

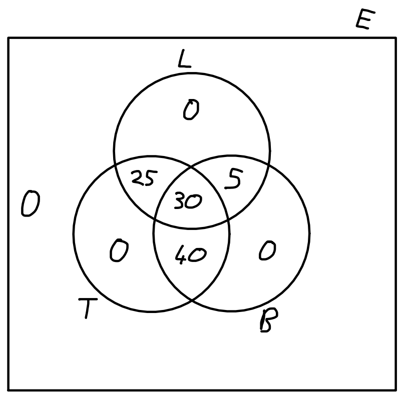
$\operatorname{card}(L \cap T \cap B) = \operatorname{card} L + \operatorname{card}(T \cap B) - \operatorname{card}(L \cup (T \cap B))$,

or $L \cup (T \cap B) \subset E$ donc $\operatorname{card}(L \cup (T \cap B)) \leq \operatorname{card} E = 100$,

et $\operatorname{card}(T \cap B) \geq 70$ d'après la question précédente,

donc $\operatorname{card}(L \cap T \cap B) \geq 60 + 70 - 100 = 30$.

Ce minorant est atteint, dans la situation suivante :



Le nombre minimum de personnes possédant un ordinateur portable, un téléphone portable et un baladeur numérique est donc 30.

Exercice 3

Soit n un entier naturel.

1. Montrer pour tout entier naturel k vérifiant $0 \leq k \leq n$ la relation

$$(n+1)\, C_n^k = (k+1)\, C_{n+1}^{k+1}.$$

2. En déduire la relation

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

1. On a $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ et $C_{n+1}^{k+1} = \dfrac{(n+1)!}{(k+1)!\,[(n+1)-(k+1)]!} = \dfrac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!}$,

donc $(k+1)\, C_{n+1}^{k+1} = (k+1) \dfrac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!}$

$= \dfrac{(n+1)!}{k!\,(n-k)!}$ car $(k+1)! = (k+1)\cdot k!$

$= (n+1) \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ car $(n+1)! = (n+1)\cdot n!$

$= (n+1)\, C_n^k$.

2. On a

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \frac{k+1}{n+1} C_{n+1}^{k+1}$ d'après la question précédente (et $n+1 \neq 0$)

$\displaystyle= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} C_{n+1}^{k+1}$

$\displaystyle= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k+1}$

$\displaystyle= \frac{1}{n+1} \sum_{k'=1}^{n+1} C_{n+1}^{k'} \cdot 1^{k'} \cdot 1^{(n+1)-k'}$

$\displaystyle= \frac{1}{n+1} \left[\left(\sum_{k'=0}^{n+1} C_{n+1}^{k'} \cdot 1^{k'} \cdot 1^{(n+1)-k'} \right) - C_{n+1}^{0} \right]$

$\displaystyle= \frac{1}{n+1} \left[(1+1)^{n+1} - 1 \right]$ d'après la formule du binôme de Newton

$\displaystyle= \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.