THNO corrigé de l'interrogation 2

__ex 1__

On a
$$\xi = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{6}}{2}$$
$$\xi^2 = \frac{10 + 6 - 2\sqrt{60}}{4} = 4 - \sqrt{15}$$

donc $(4-\xi^2)^2 - 15 = 0$, donc ξ est racine de $X^4 - 8X^2 + 1$ $(= (4-X^2)^2 - 15)$.

Le polynôme $X^4 - 8X^2 + 1$ n'a pas de racine dans $\mathbb{Q}$. En effet, si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ était racine (avec $\mathrm{pgcd}(a,b) = 1$) alors on aurait $a^4 - 8a^2b^2 + b^4 = 0$,
donc si p premier, $p | b$, alors $p \mid (8a^2b^2 - b^4)$ donc $p \mid a^4$ donc $p | a$,
donc $b = \pm 1$, et de même $a = \pm 1$, or ± 1 ne sont pas racines de $X^4 - 8X^2 + 1$.
Le polynôme minimal de ξ, qui est un facteur irréductible de $X^4 - 8X^2 + 1$, n'est donc pas de degré 1, ni de degré 3. Il est donc de degré 2 ou 4.

Si ξ était de degré 2, comme $\mathbb{Q}(\sqrt{15}) \subset \mathbb{Q}(\xi)$ et $[\mathbb{Q}(\sqrt{15}) : \mathbb{Q}] = 2$,
on aurait $\mathbb{Q}(\sqrt{15}) = \mathbb{Q}(\xi)$, donc $\xi = a + b\sqrt{15}$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$.
Alors $\xi^2 = (a + b\sqrt{15}) = a^2 + 2ab\sqrt{15} + 15b^2$ donc $\begin{cases} a^2 + 15b^2 = 4 \\ 2ab = -1 \end{cases}$,
donc $a^2 + 15b^2 = -8ab$ et $b \neq 0$, donc $\frac{a}{b}$ est racine de $X^2 + 8X + 15$, donc $\frac{a}{b} = -4 \pm \sqrt{4^2 - 15}$, c'est-à-dire $\frac{a}{b} \in \{-5, -3\}$. Comme $2ab = -1$, on trouve $2a^2 \in \{3, 5\}$, or $\frac{3}{2}$ et $\frac{5}{2}$ ne sont pas des carrés dans $\mathbb{Q}$.

Le polynôme minimal de ξ est donc $X^4 - 8X^2 + 1$.

Comme ξ est racine d'un polynôme unitaire à coefficients entiers, ξ est un entier algébrique.

__ex 2__

1 -

Notons $\theta, \theta', \theta''$ les conjugués de θ.
Comme θ est racine de $X^3 + X + 1$, on a
$$\begin{cases} \theta + \theta' + \theta'' = 0 \\ \theta\theta' + \theta\theta'' + \theta'\theta'' = 1 \\ \theta\theta'\theta'' = -1 \end{cases}$$
De plus, $\theta^3 = -\theta - 1$, $\theta'^3 = -\theta' - 1$, $\theta''^3 = -\theta'' - 1$.
On a
$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}}(1) = 1 + 1 + 1 = 3$$
$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}}(\theta) = \theta + \theta' + \theta'' = 0$$
$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}}(\theta^2) = \theta^2 + \theta'^2 + \theta''^2 = (\theta + \theta' + \theta'')^2 - 2(\theta\theta' + \theta\theta'' + \theta'\theta'') = -2$$
$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}}(\theta^3) = \mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}}(-\theta - 1) = -0 - 3 = -3$$
$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}}(\theta^4) = \mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}}(-\theta^2 - \theta) = +2 - 0 = 2$$
La matrice $\left(\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}}(\theta^{i+j})\right)_{0 \leq i, j \leq 2}$ est donc : $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

2 -

Le discriminant de la base $(1, \theta, \theta^2)$ est le déterminant de la matrice de la question 1 -, c'est-à-dire
$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -12 + 0 + 0 + 8 - 27 - 0 = -31.$$

3 - Comme le discriminant de la base $(1,\theta,\theta^2)$ (qui est formée d'entiers de $\mathbb{Q}(\theta)$, puisque θ est entier) est sans facteur carré (31 est premier), la base $(1,\theta,\theta^2)$ est une base de l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\theta)$ vu comme $\mathbb{Z}$-module.
En particulier, l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\theta)$ est le $\mathbb{Z}$-module libre engendré par $(1,\theta,\theta^2)$ (c'est-à-dire $\mathbb{Z}[\theta]$)

ex 3

1 - On procède comme dans l'exercice 2.
Notons θ,θ',θ'' les racines de X^3-X+2, dans $\mathbb{C}$.
On a :

$$Tr_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}}(1)=3$$
$$Tr_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}}(\theta)=0$$
$$Tr_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}}(\theta^2)=0^2-2\cdot(-1)=2$$
$$Tr_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}}(\theta^3)=Tr_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}}(\theta-2)=0-2\cdot3=-6$$
$$Tr_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}}(\theta^4)=Tr_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}}(\theta^2-2\theta)=2-2\cdot0=2$$

La matrice $\left(Tr_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}}(\theta^{i+j})\right)_{0\leq i,j\leq 2}$ est donc $\begin{pmatrix}3&0&2\\0&2&-6\\2&-6&2\end{pmatrix}$.

2 - Le discriminant de la base $(1,\theta,\theta^2)$ est $\begin{vmatrix}3&0&2\\0&2&-6\\2&-6&2\end{vmatrix}=12+0+0-8-0-108=-104=-2^3\cdot13$

3 - θ est racine de X^3-X+2, donc $N_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}}(\theta)=-2$, donc $N_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}}\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{-2}{2^3}=-\frac{1}{4}$.
Comme $N_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}}\left(\frac{\theta}{2}\right)\notin\mathbb{Z}$, $\frac{\theta}{2}$ n'est pas un entier algébrique.

4 - On a $N_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}}\left(\frac{\theta^2}{2}\right)=\frac{(-2)^2}{2^3}=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$ donc $\frac{\theta^2}{2}$ n'est pas un entier algébrique.

5 - Comme $\theta^3=\theta-2$, la matrice de la multiplication par $\frac{\theta+\theta^2}{2}$ dans la base $(1,\theta,\theta^2)$ est :

$$\begin{pmatrix}0&-1&-1\\1/2&1/2&-1/2\\1/2&1/2&1/2\end{pmatrix}$$

et on a

$$\begin{vmatrix}0&-1&-1\\1/2&1/2&-1/2\\1/2&1/2&1/2\end{vmatrix}=\frac{1}{4}\begin{vmatrix}0&-1&-1\\1&1&-1\\1&1&1\end{vmatrix}=\frac{1}{4}\left(0+(-1)+1-(-1)-0-(-1)\right)=\frac{1}{2}.$$

6 - D'après la question 5-, on a $N_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}}\left(\frac{\theta+\theta^2}{2}\right)=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$, donc $\frac{\theta+\theta^2}{2}$ n'est pas un entier algébrique.

7 - D'après la question 2, le discriminant de la base $(1,\theta,\theta^2)$ est $-2^3\cdot13$. Le seul nombre premier dont le carré divise ce discriminant est 2.
Si $(1,\theta,\theta^2)$ n'était pas une base de l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\theta)$ (vu comme $\mathbb{Z}$-module libre) alors il existerait un entier non nul de la forme $\frac{1}{2}(\lambda_0+\lambda_1\theta+\lambda_2\theta^2)$ avec $\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2\in\{0,1\}$.
On a $Tr_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}}\left(\frac{\lambda_0+\lambda_1\theta+\lambda_2\theta^2}{2}\right)=\frac{3}{2}\lambda_0+\lambda_2$ (cf. les calculs en question 1-),
et cette trace doit être un entier, donc $\lambda_0=0$.

On trouve donc que $\frac{\theta}{2}$, $\frac{\theta^2}{2}$ ou $\frac{\theta+\theta^2}{2}$ serait un entier, et d'après les questions 3, 4 et 6, ce n'est pas le cas. Donc $(1, \theta, \theta^2)$ est une base de l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\theta)$ (vue comme $\mathbb{Z}$-module) et cet anneau d'entiers est $\mathbb{Z}[\theta]$.