UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algorithmique (ALBA)

Examen (juin 2010)

Les notes de cours, TD et TP sont autorisées. Les calculatrices sont autorisées. Tous les autres documents sont interdits. Les téléphones portables sont interdits.

Durée : 2 heures

Exercice 1

On supposera dans cet exercice que les opérations élémentaires sur les entiers considérés (addition, soustraction, multiplication, comparaisons) se font en temps constant ($O(1)$), indépendemment de la taille des entiers considérés.

Rappelons que la suite des nombres de Fibonacci est définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et la relation de récurrence linéaire $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

1. On considère l'algorithme naïf suivant, pour calculer le n-ième nombre de Fibonacci.

```
fibonacci(n):
    si n < 2
        renvoyer 1
    sinon
        renvoyer fibonacci(n-1) + fibonacci(n-2)
```

   Quelle est sa complexité asymptotique en fonction de n ?

2. Donner, sous forme de pseudocode, un algorithme qui calcule le couple (u_n, u_{n+1}) en un temps linéaire en n.

3. Montrer que l'on a

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   En déduire un algorithme (que l'on donnera sous forme de pseudocode) permettant de calculer u_n en $O(\log n)$ opérations.

Exercice 2

On considère dans cet exercice des polynômes éléments de l'anneau $\mathbb{K}[X]$, où $\mathbb{K}$ est un corps. On notera A et B deux tels polynômes, avec $\deg A \geqslant \deg B$.

1. Rappeler l'algorithme d'Euclide étendu permettant de calculer le PGCD des polynômes A et B et de trouver une relation de Bézout.

TSVP →

2. Expliciter les calculs réalisés (et trouver le résultat) dans le cas de $A(X) = X^5 - 3X + 1 \in \mathbb{R}[X]$ et $B(X) = X^3 + X^2 + X + 1 \in \mathbb{R}[X]$.
3. Notons (R_i) la suite des restes successifs dans l'algorithme d'Euclide, avec $R_0 = A$ et $R_1 = B$. Notons également $R_i = AU_i + BV_i$ les égalités obtenues au cours du déroulement de l'algorithme. Montrer que si $i \geqslant 2$ alors on a

$$\deg R_{i-1} + \deg U_i = \deg B \quad \text{et} \quad \deg R_{i-1} + \deg V_i = \deg A.$$

4. En déduire une majoration des degrés des polynômes intervenant dans la relation de Bézout obtenue, en fonction des degrés de A et B.
5. Montrer par récurrence que l'on a $U_{i-1}V_i - U_iV_{i-1} = \pm 1$.
6. Soient U et V deux polynômes tels que $\deg V < \deg V_i$ et $\deg(AU + BV) < \deg R_{i-2}$. Les questions suivantes ont pour but de montrer que l'on a $\frac{U}{V} = \frac{U_{i-1}}{V_{i-1}}$. Montrer qu'il existe des polynômes W et T, uniques, tels que

$$U = WU_{i-1} + TU_i \quad \text{et} \quad V = WV_{i-1} + TV_i.$$

(On pourra par exemple remarquer que $U_{i-1}V_i - U_iV_{i-1}$ peut être vu comme un déterminant).
7. Supposons $T \neq 0$. Montrer que $\deg(WV_{i-1}) = \deg(TV_i)$.
8. En déduire, sous la même hypothèse, que $\deg W - \deg R_{i_2} = \deg T - \deg R_{i-1}$, puis que $\deg(WR_{i-1}) > \deg(TR_i)$, puis que $\deg(AU + BV) = \deg W + \deg R_{i-1}$.
9. En déduire $\deg T < 0$. Conclure.
10. Étant donné un polynôme $D(X) \in \mathbb{K}[X]$, avec $\deg D < N$, on s'intéresse aux approximations de Padé $\frac{U}{V}$, avec U et V deux polynômes, telles que $\frac{U(x)}{V(x)} \underset{x \to 0}{=} D(x) + O(x^N)$. Montrer que pour D et N fixés, l'algorithme d'Euclide étendu permet de trouver une approximation de Padé avec des polynômes U, V de degré minimal. (On pourra considérer $A(X) = X^n$ et $B(X) = D(X)$).

Exercice 3

En utilisant l'algorithme de multiplication de Karatsuba, en se ramenant récursivement à des multiplications de nombres de un chiffre, calculer 7551×8731. Le détail des calculs devra être explicité.