

Durée : 1h

Les notes de cours et de TD sont autorisées.

Exercice 1

On considère le corps de nombres $K = \mathbb{Q}(3^{1/3})$.

1. Montrer que $1, 3^{1/3}, 3^{2/3}$ sont des éléments de l'anneau \mathcal{O}_K des entiers de K .
2. Calculer l'image de ces trois éléments par la trace $\text{Tr}_{K/\mathbb{Q}}$ et la norme $N_{K/\mathbb{Q}}$.
3. Calculer le discriminant de la base $(1, 3^{1/3}, 3^{2/3})$ de K sur \mathbb{Q} .
4. Montrer que si $\frac{1}{3}(a + b3^{1/3} + c3^{2/3}) \in \mathcal{O}_K$, avec $a, b, c \in \{0, 1, 2\}$, alors $a = 0$. (On pourra considérer la trace du carré de cet élément de K).
5. Sous les mêmes hypothèses, montrer que l'on a aussi $b = c = 0$. (On pourra considérer sa norme).
6. En déduire une \mathbb{Z} -base de \mathcal{O}_K .
7. Montrer que $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[3^{1/3}]$.