UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie euclidienne et isométries

Examen (session de décembre) : 2 heures.

Les documents et téléphones portables ne sont pas autorisés.

Rappel concernant les notations : Soit $\mathscr{E}$ est un espace affine euclidien de direction E. Si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs de E, on note $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$ leur produit scalaire. Si A, B sont des points de $\mathscr{E}$, on désigne par AB la norme euclidienne du vecteur défini par le bipoint (A, B) i.e.

$$AB := \|\overrightarrow{AB}\|.$$

Exercice 1

On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel. Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Schmidt aux vecteurs

$$\overrightarrow{v}_1 = (1,0,1),\ \overrightarrow{v}_2 = (2,1,0),\ \overrightarrow{v}_3 = (1,1,1)$$

de $\mathbb{R}^3$ et expliciter la base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ ainsi obtenue.

Exercice 2

Soient $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien, A, B deux points distincts de $\mathscr{E}$ et I le milieu du segment $[A, B]$.

1 Soit $M \in \mathscr{E}$. Montrer que

$$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{BA}.$$

2 En déduire que les trois ensembles suivants sont égaux :

- l'ensemble des points équidistants de A et B ;
- l'hyperplan contenant I et orthogonal à la droite passant par A et B.

Exercice 3

Soient $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3 et $\mathscr{D}$ une droite affine de $\mathscr{E}$. On note respectivement E et D les directions de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{D}$. On considère un vissage de $\mathscr{E}$ d'axe $\mathscr{D}$, c'est à dire une isométrie affine v de $\mathscr{E}$ qui est la composée d'une rotation r d'axe $\mathscr{D}$ et d'une translation t de vecteur $\overrightarrow{u} \in D$:

$$v = t \circ r.$$

1 Montrer que pour tout $M \in \mathscr{E}$:

$$\overrightarrow{Mv(M)} = \overrightarrow{Mr(M)} + \overrightarrow{u} \qquad \text{et} \qquad Mv(M)^2 = Mr(M)^2 + \|\overrightarrow{u}\|^2.$$

2 En déduire que $\mathscr{D}$ est l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que $\overrightarrow{Mv(M)}$ appartienne à D et que c'est également l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ minimisant la distance $Mv(M)$.

Exercice 4

Soient $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien et $\mathscr{D}$ une droite affine de $\mathscr{E}$. On se donne un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de $\mathscr{D}$ et un point $A \in \mathscr{D}$. Soit M un point de $\mathscr{E}$, on appelle distance du point M à la droite $\mathscr{D}$ le réel positif

$$d(M, \mathscr{D}) = MN$$

où N est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$.

1 Montrer que

$$AN^2 = \frac{(\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{u})^2}{\|\overrightarrow{u}\|^2}.$$

(On pourra utiliser le fait qu'il existe un réel $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AN} = \lambda \overrightarrow{u}$.)

2 Montrer que pour tout point M de $\mathscr{E}$, on a

$$d(M, \mathscr{D})^2 = AM^2 - \frac{(\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u})^2}{\|\overrightarrow{u}\|^2}.$$

3 On suppose maintenant que $\mathscr{E} = \mathbb{R}^3$ muni de la structure euclidienne usuelle, que $\overrightarrow{u} = (1, 0, 1)$ et que $A = (0, 2, 1)$. On considère la droite Δ de $\mathscr{E}$ passant par le point $B = (-1, 2, 2)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v} = (1, -1, 1)$. Déterminer

$$\min\{d(M, \mathscr{D}) : M \in \Delta\}.$$

En quel point de Δ ce minimum est-il atteint ? Les droites $\mathscr{D}$ et Δ sont-elles concourantes ?

Exercice 5

Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension 3 et $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs distincts de E tels que $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\|$.

1 Soit D une droite vectorielle de E contenue dans le plan orthogonal au vecteur $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$. On note P l'orthogonal de D, et on pose

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} \qquad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$$

avec $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1} \in D$ et $\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v_2} \in P$. Montrer que $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{v_1}$ et que $\|\overrightarrow{u_2}\| = \|\overrightarrow{v_2}\|$. En déduire qu'il existe une rotation r d'axe D telle que $r(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$.

(On rappelle que, dans un plan euclidien P, il existe, pour tout vecteur unitaire distinct $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ de P, une unique rotation ρ de P telle que $\rho(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{y}$.)

2 En déduire qu'une droite vectorielle D de E est l'axe d'une rotation r de E telle que $r(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$ si et seulement si D est contenue dans le plan vectoriel orthogonal à $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$.