Géométrie et isométries

TD1 : Rappels d'algèbre linéaire

Exercice 1

Soit $f\colon E \to F$ une application linéaire. Montrer que $\ker f = \left\{x \in E \big/ f(x) = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de E. Montrer que l'image de f est un sous-espace vectoriel de F.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel, et soit f un endomorphisme de E. Montrer que $\ker f^2 = \ker f$ si et seulement si $\ker f \cap \operatorname{im} f = \{0\}$.

Exercice 3

Calculer le noyau de la matrice suivante.

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & -15 \\ 4 & 7 & 13 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$$

Exercice 4

Soit $n > 0$ un entier. Soit E l'ensemble des polynôme à cœfficients dans $\mathbb{R}$, de degré inférieur ou égal à n.

1. Montrer que E, muni de l'addition des polynômes et de la multiplication des polynômes par un réel, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Quelle est la dimension de E ?
3. Soit $a \in \mathbb{R}$, et soit $\mathrm{ev}_a\colon E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\mathrm{ev}_a(P) = P(a)$. Montrer que ev_a est une forme linéaire sur E.
4. Quelle est la dimension du noyau de ev_a ?

Exercice 5

Soit $f\colon E \to F$ une application linéaire de rang 1. Montrer qu'il existe une forme linéaire ℓ sur E et un vecteur $v \in F$ tels que $f(x) = \ell(x)v$ pour tout $x \in E$.

Exercice 6

On considère l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 0}$ qui vérifient $u_n = u_{n-2} + u_{n-3}$ (pour tout $n \geqslant 3$).

1. Montrer que c'est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites réelles.
2. Montrer qu'une telle suite vérifie

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \qquad (\forall n \geqslant 0)$$

3. Montrer que cet espace est de dimension finie et déterminer sa dimension.

Exercice 7

Soit E un k-espace vectoriel, et soit f un endomorphisme de E, tel que les droites vectorielles de E (c'est-à-dire les sous-espaces de dimension 1) sont stables par f. Montrer que f est une homothétie, i.e. qu'il existe une constante $\lambda \in k$ telle que $\forall x \in E \quad f(x) = \lambda x$.

Exercice 8

Soit E un espace vectoriel, et soient $p_1, \ldots, p_m$ des endomorphismes de E tels que :

(i) $p_i \circ p_i = p_i$, pour $1 \leqslant i \leqslant m$, i.e. les endomorphismes p_i sont des projecteurs ;

(ii) $p_i \circ p_j = 0$, si $1 \leqslant i, j \leqslant m$ et $i \neq j$;

(iii) $p_1 + \ldots + p_m = \mathrm{id}_E$.

Montrer que les images de $p_1, \ldots, p_m$ sont en somme directe, et que leur somme est E.

Réciproquement, montrer que si $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_m$, avec $E_1, \ldots, E_m$ des sous-espaces de E, alors il existe des projecteurs $p_1, \ldots, p_m$ comme ci-dessus tels que l'image de chaque p_i soit E_i.

Exercice 9

Soient $f\colon E \to M$ et $g\colon F \to M$ deux applications linéaires. On définit les applications linéaires suivantes :

$$\Phi\colon \begin{cases} E \times F & \longrightarrow & M \\ (x, y) & \longmapsto & f(x) - g(y) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{pr}_1\colon \begin{cases} E \times F & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & x. \end{cases}$$

Montrer que

$$\mathrm{im}\, f \cap \mathrm{im}\, g = f(\mathrm{pr}_1(\ker \Phi)).$$

Exercice 10

On considère l'application $\mathbb{R}$-linéaire $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(x) = (1+2i)x$ ($\forall x \in \mathbb{C}$).

1. Écrire sa matrice dans la base $(1, i)$.
2. Quel est son polynôme caractéristique ?
3. Quelles sont ses valeurs propres ? Quelles sont ses valeurs propres après extension à $\mathbb{C}$?
4. Quels sont les vecteurs propres associés ?

Exercice 11

Quel est le polynôme caractéristique de cette matrice ?

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Exercice 12

Quelles sont les valeurs propres d'un projecteur ?

Exercice 13

Quel est le centre du groupe $\mathrm{GL}_n(K)$?

Exercice 14

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soient F, F' deux sous-espaces de E de même dimension. Montrer qu'il existe un sous-espace de E qui est supplémentaire de F et de F'. (On pourra raisonner par récurrence sur la codimension de F).