UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie et isométries

Feuille 2 : Produit scalaire

Exercice 1

Montrer que la multiplication de $\mathbb{R}$ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Montrer que sur $\mathbb{C}$, vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, l'application $(x,y) \mapsto \mathscr{R}e(\overline{x}y)$ est un produit scalaire.

Exercice 3

Soit E l'espace des fonction réelles continues sur $[0,1]$. Montrer que

$$\left\{ \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est un produit scalaire sur E.

Exercice 4

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = \frac{t^2}{4}$. Montrer que $xy = f(x+y) - f(x-y)$ $(\forall x, y \in \mathbb{R})$.
2. Sachant que l'on a $f(245514) = 15069281049$ et $f(220512) = 12156385536$, calculer 233013×12501 (sans calculatrice).

Exercice 5

On dit que deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul. Les vecteurs suivants sont-ils orthogonaux ?

(i) $(1,0)$ et $(0,1)$ dans $\mathbb{R}^2$;

(ii) $(2,3)$ et $(3,2)$ dans $\mathbb{R}^2$;

(iii) $(2,3)$ et $(3,-2)$ dans $\mathbb{R}^2$;

(iv) $(1,2,-4)$ et $(2,1,0)$ dans $\mathbb{R}^3$;

(v) $x \mapsto 1$ et sin dans l'espace des fonctions réelles continues sur $[0, 2\pi]$, muni du produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$;

(vi) sin et cos dans le même espace qu'à la question précédente ;

(vii) α et $i\alpha$ dans $\mathbb{C}$ muni du produit scalaire $(x, y) \mapsto \mathscr{Re}(\overline{x}y)$, pour $\alpha \in \mathbb{C}$.

Exercice 6

Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire. Soit $v \in E \setminus \{0\}$. Montrer que l'ensemble des éléments de E orthogonaux à v est un sous-espace vectoriel de E. Quelle est sa dimension ?

Exercice 7

Deux vecteurs orthogonaux peuvent-ils être colinaires ? Si $e_1, \ldots, e_m$ sont des vecteurs non nuls qui sont deux à deux orthogonaux, que peut-on dire de cette famille de vecteurs ?

Exercice 8

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$. Soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E, et soit A la matrice des $a_{i,j} = (e_i \mid e_j)$, avec $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Montrer que A est symétrique et que ses valeurs propres sont strictement positives.

Exercice 9

Soient $e_1, \ldots, e_n$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Notons A la matrice de la famille $e_1, ..., e_n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Notons $(\cdot \mid \cdot)$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$, et soit $G = \big((e_i \mid e_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Montrer que $\det(G) = \det(A)^2$.