UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie et isométries

Feuille 3 : Produit scalaire, orthogonalité, inégalité de Cauchy-Schwarz

Exercice 1

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant (b-a)^{1/2}\left(\int_a^b f(t)^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel euclidien. Notons $\|\cdot\|$ la norme associée. Soient $x, y \in E$. Montrer que l'on a $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ si et seulement si $x = 0$ ou $y = \lambda x$ pour un réel $\lambda \geqslant 0$.

Exercice 3

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$, pour $n \geqslant 2$, muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad (\forall x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in E).$$

Montrer qu'il n'existe pas de produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ sur E tel que $\|x\|_1^2 = (x \mid x)$ $(\forall x \in E)$.

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel euclidien (donc de dimension finie) et soit F un sous-espace de E. Notons $F^\perp$ l'orthogonal de F. Montrer que $E = F \oplus F^\perp$ et que $(F^\perp)^\perp = F$.

Exercice 5

Y a-t-il un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ tel que $(1,2)$ et $(1,3)$ forment une base orthonormée ?

Exercice 6

Soit E un espace vectoriel euclidien, et soient F et G deux sous-espaces de E. Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice 7

Soit E un espace vectoriel euclidien. Notons $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit $v \in E \setminus \{0\}$.

1. Soit $x \in E$. Montrer qu'il existe un unique $y \in \mathbb{R}v$ tel que $\|x - y\|$ soit minimal.
2. Sous les mêmes hypothèses, montrer que $x - y$ et v sont orthogonaux, et que y est l'unique élément de $\mathbb{R}v$ tel que cette propriété soit vérifiée.
3. Sous les mêmes hypothèses, montrer que $y = \frac{(v|x)}{\|v\|^2}v$, en notant $(\cdot \mid \cdot)$ le produit scalaire.
4. Montrer que l'application $\pi\colon E \to E$ définie par $\pi(x) = \frac{(v|x)}{\|v\|^2}v$ est un projecteur (i.e. un endomorphisme idempotent).
5. Quel est le noyau de π ?

Exercice 8

Soit E un espace vectoriel euclidien, de dimension n. Notons $(\cdot \mid \cdot)$ le produit scalaire. Soit $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ une famille d'éléments de E, telle que

$$(e_i \mid e_j) < 0 \qquad (\forall i, j \in \{1, \dots, m\}, i \neq j).$$

Montrer que $m \leqslant n + 1$.

Exercice 9

Soient E et F deux espaces vectoriels euclidiens. On note $(\cdot \mid \cdot)_E$ et $(\cdot \mid \cdot)_F$ leurs produits scalaires respectifs.

1. Montrer que l'application $\varphi_E\colon x \mapsto (x \mid \cdot)$ réalise un isomorphisme de E sur l'espace E^* dual de E, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires sur E.
2. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Montrer que $\tilde{f} : \ell \mapsto \ell \circ f$ est une application linéaire de F^* dans E^*.
3. On fixe une base orthonormée de E et une base orthonormée de F. Décrire la matrice de $\varphi_E^{-1} \circ \tilde{f} \circ \varphi_F$ en fonction de celle de f.