UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie et isométries

Feuille 4 : Orthonormalisation et orthogonalité. Isométries vectorielles.

Exercice 1

Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Schmidt aux familles de vecteurs suivantes, et compléter la famille obtenue en une base de l'espace vectoriel euclidien considéré.

a. $(1, 0, 1)$, $(2, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$;

b. $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$;

c. $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 1, 1, 1)$, $(2, 3, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2

Soit $e_1, \dots, e_n$ une base orthonormée de l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$. Écrire la matrice de Gram de la famille $(e_1, \dots, e_n)$. En déduire le carré du déterminant de $(e_1, \dots, e_n)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 3

Soit $\mathscr{F}$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$, et soient $\mathscr{F}_0 = \mathscr{F}$, $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$, … les familles de vecteurs obtenues au cours de l'application du procédé d'orthonormalisation à la famille $\mathscr{F}$. Calculer le déterminant de $\mathscr{F}_{i+1}$ (dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$) en fonction de celui de $\mathscr{F}_i$ (et d'un réel intervenant à cette étape du procédé d'orthonormalisation). En déduire une méthode de calcul de déterminants (au signe près) basée sur le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, et calculer par cette méthode la valeur absolue du déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 4

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$, muni du produit scalaire

$$(P, Q) \longmapsto (f \mid g) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.

2. On applique le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à la base $1, X, X^2, X^3, \dots$ Calculer les quatre premiers vecteurs de la base orthonormée $(P_n)_{n\geqslant 0}$ ainsi obtenue.
3. Notons $\ell(Q)$ le cœfficient dominant du polynôme Q. Montrer que l'on obtient la même base orthonormée en partant de $1, \ell(P_0)^{-1}XP_0, \ell(P_1)^{-1}XP_1, \ell(P_2)^{-1}XP_2, \dots$
4. Montrer que si $i \leqslant j-2$, alors $(P_i \mid XP_j) = 0$.
5. Montrer que l'on a une relation de récurrence de la forme

$$P_n = (a(n)X + b(n))\, P_{n-1} + c(n)P_{n-2} \qquad (\forall n \geqslant 2).$$

Exercice 5

Montrer qu'une application linéaire entre deux espaces vectoriels euclidiens, qui préserve la norme, préserve le produit scalaire.

Exercice 6

Les applications linéaires suivantes sont-elles des isométries ?

a. Le morphisme nul.

b. L'identité.

c. Une homothétie.

d. L'endomorphisme
$$\begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} & \longmapsto & (x_{\sigma(i)})_{1\leqslant i\leqslant n}, \end{cases}$$
où σ est une permutation de $\{1, \dots, n\}$.

e. L'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

f. L'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

g. L'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

h. L'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

i. L'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

j. L'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Exercice 7

Soit E un espace vectoriel euclidien, et soit f un endomorphisme de E, de rang 1. Pour quels endomorphismes f l'application $x \mapsto x + f(x)$ est-elle une isométrie vectorielle ?

Exercice 8

Montrer que deux symétries orthogonales distinctes d'un plan vectoriel euclidien commutent si et seulement si leurs axes sont orthogonaux.