UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie et isométries

Feuille 5 : Isométries, groupe orthogonal

Exercice 1

1. Montrer que toute matrice inversible est produit d'une matrice triangulaire inférieure par une matrice orthogonale.
2. Utiliser cette décomposition pour résoudre le système suivant.

$$\begin{cases} 3x + 4y = 10 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

Exercice 2

Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels euclidiens de même dimension n. Soient (e_i) une base orthonormée de E et (f_j) une base orthonormée de F. On note $A = (a_{ij})$ la matrice de f pour les bases (e_i) et (f_j). Montrer l'équivalence des propriétés suivantes.

(i) Le morphisme f est une isométrie.

(ii) Les colonnes de la matrice A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ (muni du produit scalaire usuel).

(iii) Les lignes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

(iv) ${}^tA\,A = I$

(v) $A\,{}^tA = I$

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel euclidien.

1. Soit D une droite de E. Montrer qu'il existe une isométrie de E dont l'ensemble des points fixes est D.
2. Quel est le centre du groupe des isométries de E ?

Exercice 4

Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ pour lequel les éléments de G sont des isométries.
2. En déduire que G est le conjugué d'un sous-groupe fini du groupe des matrices orthogonales de taille n.

Exercice 5

Soient E et F deux espaces vectoriels euclidiens. Soit $f: E \to F$ une application (ensembliste) telle que $f(0) = 0$ et f préserve les distances (i.e. $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$, quels que soient $x, y \in E$). Montrer que f est une isométrie (en particulier, f est linéaire).

Montrer que ce n'est plus vrai si l'on omet l'hypothèse $f(0) = 0$.

Soit $\theta: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une application, et soit $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = ze^{i\theta(|z|)}$. On munit $\mathbb{C}$ du produit scalaire $u, v \mapsto \mathscr{Re}(\overline{u}v)$. Montrer que l'application f vérifie $f(0) = 0$ et $\|f(z)\| = \|z\|$ ($\forall z \in \mathbb{C}$). Montrer que f est une isométrie si et seulement si θ est constante.

Exercice 6

Soient a et b deux vecteurs unitaires distincts de $\mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe une unique réflexion qui échange a et b. Déterminer le plan de réflexion.

Exercice 7

Soit E un espace vectoriel euclidien, et soit f un endomorphisme de E. On suppose que f est une involution, i.e. $f \circ f = \mathrm{id}_E$. Montrer que f est une isométrie si et seulement si f est une symétrie orthogonale.

Exercice 8

Soit E un espace vectoriel euclidien, et soit f une isométrie de E. Montrer que le noyau et l'image de $f - \mathrm{id}_E$ sont supplémentaires orthogonaux.

Exercice 9

Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit C un convexe fermé de E. (Rappelons qu'une partie C de E est dite convexe si quels que soient $x, y \in C$ le segment $[x, y]$, i.e. l'ensemble des $(1 - \lambda)x + \lambda y$ pour $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, est contenu dans C). Soit $x \in E$. Montrer qu'il existe une unique $p(x) \in C$ tel que la distance $\|x - p(x)\|$ soit minimale.

Montrer que si C est un sous-espace vectoriel de E, alors $p(x)$ est le projeté orthogonal de x sur E.

Montrer que l'application p vérifie $\|p(x) - p(y)\| \leqslant \|x - y\|$ ($\forall x, y \in E$).