UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie et isométries

Feuille 6 : Groupe orthogonal en dimension 2 ou 3, géométrie affine

Exercice 1

Montrer que la matrice dans une base orthonormée d'une isométrie vectorielle en dimension 2 est de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \qquad (\theta \in \mathbb{R})$$

Exercice 2

Soient E un espace vectoriel euclidien et f une isométrie de E. Soit F un sous-espace de E stable par f. Montrer que $F^\perp$ est aussi stable par f.

Exercice 3

1. Montrer qu'en dimension 2, une isométrie vectorielle de déterminant -1 est une symétrie orthogonale par rapport à une droite.
2. Montrer qu'en dimension 3, toute isométrie vectorielle directe a une droite formée de points fixes.

Exercice 4

Montrer que l'intersection de deux sous-espaces affines est un sous-espace affine.

Exercice 5

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension finie, et soit E l'espace vectoriel sous-jacent. Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ et soit $u \in E$. Montrer que l'image de $\mathscr{F}$ par la translation de vecteur u est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$, de même dimension que $\mathscr{F}$.

Exercice 6

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine. Soient $\mathscr{D}$ une droite de $\mathscr{E}$ et $P \in \mathscr{E}$ un point. Montrer qu'il y a une et une seule droite de $\mathscr{E}$ passant par P et parallèle à $\mathscr{D}$.

Exercice 7

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension finie. Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille finie de points de $\mathscr{E}$ et $(\alpha_i)_{i\in I}$ une famille de réels telle que $\sum_{i\in I} a_i \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe un unique point $O \in \mathscr{E}$ tel que $\sum_{i\in I} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} = 0$. (Ce point s'appelle le barycentre du système de points pondérés $(A_i, \alpha_i)_{i\in I}$).
2. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, alors O est aussi le barycentre du système $(A_i, \lambda\alpha_i)_{i\in I}$.
3. Montrer que l'ensemble des barycentres de deux points distincts (pour toutes les pondérations possibles) est la droite passant par ces deux points.
4. On considère une famille finie de systèmes de points pondérés, $(B_{i,j}, \beta_{i,j})_{j\in J_i}$ pour $i \in I$, telle que $\sum_{j\in J_i} \beta_{i,j} \neq 0$ pour tout $i \in I$ et $\sum_{i\in I} \sum_{j\in J_i} \beta_{i,j} \neq 0$. Notons G_i le barycentre de $(B_{i,j}, \beta_{i,j})_{j\in J_i}$. Montrer que le barycentre du système $(G_i, \sum_{j\in J_i} \beta_{i,j})_{i\in I}$ est le même point que le barycentre du système $(B_{i,j}, \beta_{i,j})_{i\in I, j\in J_i}$. (Cette propriété s'appelle l'associativité du barycentre).
5. Montrer que les médianes d'un triangle sont concourantes.

Exercice 8

On rappelle qu'une application affine $\varphi \colon \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ (avec $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux espaces affines) est une application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ telle que si $O \in \mathscr{E}$ alors l'application qui à $\overrightarrow{OP}$ associe $\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)}$, pour $P \in \mathscr{E}$, est linéaire.

1. Montrer que cette définition ne dépend pas du point O.
2. Montrer que les applications affines préservent l'alignement.
3. Décrire l'application conjuguée d'une translation par une bijection affine.

Exercice 9

Le groupe affine d'un espace affine $\mathscr{E}$ est le groupe des bijections affines de $\mathscr{E}$ sur luimême. Décrire le groupe affine en dimension 1.

Exercice 10

Quel est le centre du groupe affine en dimension $n \in \mathbb{N}$?