UNIVERSITÉ DE RENNES 1

**Géométrie et isométries**

*Feuille 7 : Géométrie affine élémentaire*

## Exercice 1

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension finie $n$, et soient $A_0, \dots, A_n$ des points de $\mathscr{E}$ tels qu'aucun sous-espace affine de $\mathscr{E}$ autre que $\mathscr{E}$ ne contienne tous les points $A_0, \dots, A_n$. Montrer que tout point de $\mathscr{E}$ s'écrit comme un barycentre des points $A_0, \dots, A_n$, et que les coefficients du barycentre sont uniques à multiplication par un scalaire près.

## Exercice 2

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine, et soit $\mathscr{A}$ une partie de $\mathscr{E}$ telle que tout barycentre de points de $\mathscr{A}$ soit dans $\mathscr{A}$. Montrer que $\mathscr{A}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$.

## Exercice 3

Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ deux espaces affines, et soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ une application (ensembliste). On suppose que, pour toute famille finie $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$ de points de $\mathscr{E}$ pondérés telle que $\sum_{i\in I} \lambda_i \neq 0$, l'image par $f$ du barycentre de $(A_i, \lambda_i)_{i\in I}$ est le barycentre de $(f(A_i), \lambda_i)_{i\in I}$. Montrer que $f$ est une application affine.

## Exercice 4

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine. Si $O$ est un point de $\mathscr{E}$ et si $\lambda \in \mathbb{R}^\times$, l'homothétie $h_{O,\lambda}$ de centre $O$ et de rapport $\lambda$ est définie par $\overrightarrow{Oh_{O,\lambda}(P)} = \lambda\overrightarrow{OP}$.

1. Montrer que si $\lambda \neq 1$, alors l'homothétie $h_{O,\lambda}$ a un unique point fixe.
2. Montrer que la composée de deux homothéties est une homothétie ou une translation.
3. Montrer que l'ensemble des homothéties et des translations de $\mathscr{E}$ est un groupe pour la composition des applications.
4. Montrer que les éléments de ce groupe transforment les sous-espaces affines en des sous-espaces affines parallèles.

## Exercice 5

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine, et soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application affine qui transforme toute droite en une droite parallèle. Montrer que $f$ est une homothétie ou une translation.

## Exercice 6

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine, et soit $E$ l'espace vectoriel sous-jacent. Montrer que le groupe affine $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ est en bijection avec $\mathrm{GL}(E) \times E$. Est-ce un isomorphisme de groupes ?

## Exercice 7

Soit $\mathscr{E}$ un plan affine. Soient $A, B, C$ et $A', B', C'$ deux triplets de points de $\mathscr{E}$ distincts et non alignés. Montrer qu'il y a une unique application affine $f$ de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.

## Exercice 8

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine. Soient $\mathscr{H}$, $\mathscr{H}'$, $\mathscr{H}''$ trois hyperplans parallèles de $\mathscr{E}$. Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites dont la direction n'est pas contenue dans celle de $\mathscr{H}$.

1. Montrer que $\mathscr{D} \cap \mathscr{H}$ est un singleton.
2. Notons $A$, $A'$, $A''$ les intersections de $\mathscr{D}$ avec $\mathscr{H}$, $\mathscr{H}'$, $\mathscr{H}''$ respectivement, et $B$, $B'$, $B''$ les intersections de $\mathscr{D}'$ avec $\mathscr{H}$, $\mathscr{H}'$, $\mathscr{H}''$ respectivement. On suppose $\mathscr{H} \neq \mathscr{H}'$. Montrer qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{AA''} = \lambda \overrightarrow{AA'}$.
3. Montrer que $\overrightarrow{BB''} = \lambda \overrightarrow{BB'}$.

## Exercice 9

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien, et soient $A$ et $B$ deux points de $\mathscr{E}$. On définit le milieu $I$ de $A$ et $B$ comme l'isobarycentre de $A$ et $B$ (i.e. le barycentre du système $\{(A, 1), (B, 1)\}$). Montrer que $I$ est équidistant de $A$ et $B$.

## Exercice 10

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien, et soient $A$ et $B$ deux points de $\mathscr{E}$. Montrer que l'ensemble des points équidistants de $A$ et $B$ est un hyperplan de $\mathscr{E}$.