Géométrie et isométries

Feuille 8 : Isométries affines

Exercice 1

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension finie et soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$.

1. Montrer qu'il existe un point P de $\mathscr{E}$ fixe par G.
2. Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$, où E est l'espace vectoriel sous-jacent à $\mathscr{E}$.
3. Montrer qu'il existe un produit scalaire invariant par (la partie linéaire des éléments de) G.
4. Montrer qu'il existe une bijection affine $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ telle que le conjugué de G par f soit formé d'isométries qui laissent fixe le point P.

Exercice 2

Soient A et B deux points distincts d'un espace affine euclidien $\mathscr{E}$. Montrer que les trois ensembles suivants sont égaux :

(i) l'ensemble des points équidistants de A et B,

(ii) l'hyperplan orthogonal à la droite passant par A et B et qui contient le milieu (isobarycentre) de A et B,

(iii) l'ensemble des points fixes de l'unique réflexion qui échange A et B.

Cet ensemble est appelé l'hyperplan médiateur (ou, en dimension 2, la médiatrice) du segment $[AB]$.

Exercice 3

Soit $\mathscr{E}$ un plan affine euclidien, et soit E l'espace vectoriel sous-jacent.

1. Soient $u, v \in E \setminus \{0\}$. Montrer qu'il existe une unique rotation qui transforme $\frac{u}{\|u\|}$ en $\frac{v}{\|v\|}$.
2. On note θ l'angle de cette rotation, en ayant fixé une orientation de E. (On l'appelle la mesure de l'angle (u, v)). Montrer que le produit scalaire $(u \mid v)$ est égal à $\|u\|\,\|v\| \cos\theta$.
3. Soient A, B, C trois points distincts de $\mathscr{E}$. Soient a la distance entre B et C, b la distance entre C et A, c la distance entre A et B. Soit θ la mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Montrer que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$.

Exercice 4

Soient A, B, C, A', B', C' six points d'un plan affine euclidien $\mathscr{E}$. On suppose les égalités de distances suivantes : $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$. Montrer qu'il existe une isométrie σ de $\mathscr{E}$ telle que $\sigma(A) = A'$, $\sigma(B) = B'$ et $\sigma(C) = C'$.

Exercice 5

Soient A, B, A', B' quatre points d'un plan affine euclidien $\mathscr{E}$. On suppose l'égalité de distances $AB = A'B'$. Construire à la règle et au compas le centre de la rotation ρ telle que $\rho(A) = A'$ et $\rho(B) = B'$, quand une telle rotation existe. Que se passe-t-il quand il n'existe pas de telle rotation ?

Exercice 6

Soient A et B deux points distincts d'un espace affine euclidien $\mathscr{E}$. Quel est le lieu des points M tels que les droites (MA) et (MB) soient orthogonales ?