UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie et isométries

Feuille 9 : Isométries, angles, géométrie du triangle

Exercice 0

Soient A, B, C, D quatre points d'un plan affine euclidien orienté $\mathscr{E}$. On suppose que la droite (AB) est parallèle à (CD), que (AD) est parallèle à (BC) et que (AB) est orthogonale à (AD). Quel est le groupe des isométries de $\mathscr{E}$. qui laissent stable l'ensemble $\{A, B, C, D\}$?

Exercice 1

Dans un plan affine euclidien orienté $\mathscr{E}$, soit ρ une rotation de centre O et d'angle θ, et soit σ la réflexion par rapport à une droite $\mathscr{D}$. Décrire l'isométrie $\sigma \circ \rho \circ \sigma$.

Exercice 2

Soient A, B, C trois points d'un plan euclidien $\mathscr{E}$. On suppose que C est sur la médiatrice du segment $[AB]$. Montrer que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$. (Indication : utiliser une réflexion bien choisie).

Exercice 3

Dans un plan euclidien $\mathscr{E}$, soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O, et soient A, B, C trois points distincts de $\mathscr{C}$. Montrer que $2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. (Indication : utiliser l'exercice précédent).

Exercice 4

Dans un plan euclidien $\mathscr{E}$, soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon r, et A un point. Soit $\mathscr{D}$ une droite passant par A et qui coupe $\mathscr{C}$ en deux points M et M'. On appelle *puissance de A par rapport à $\mathscr{C}$* le réel $(\overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{AM'})$.

1. Montrer que $(\overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{AM'}) = AO^2 - r^2$.
2. La puissance de A par rapport à $\mathscr{C}$ dépend-elle du choix de la droite $\mathscr{D}$?
3. Quel est l'ensemble des points ayant une puissance donnée par rapport à $\mathscr{C}$?
4. Soit $\mathscr{C}'$ un autre cercle. Quel est l'ensemble des points ayant même puissance par rapport à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$?

Exercice 5

Soient A, B, C trois points d'un plan euclidien $\mathscr{E}$. On note $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Soit I le milieu du segment $[BC]$.

1. Montrer que $(\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\left(b^2 + c^2 - a^2\right)$.
2. Calculer AI^2 à l'aide de b, c et $(\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AC})$.
3. En déduire que $AI^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$.

Exercice 6

Soient A, B, C trois points d'un plan euclidien $\mathscr{E}$. On note $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Soit I l'image de A par projection orthogonale sur la droite (BC). La droite (AI) est appelée la hauteur du triangle ABC issue de A. On suppose que le triangle ABC n'est pas rectangle, i.e. qu'il n'y a pas deux droites orthogonales parmis (AB), (BC) et (CA).

1. Montrer que $(\overrightarrow{BC} \mid \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{BC} \mid \overrightarrow{BI})$ et $(\overrightarrow{CB} \mid \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{CB} \mid \overrightarrow{CI})$.
2. Montrer que I est le barycentre de $(B, (\overrightarrow{CB} \mid \overrightarrow{CA}))$ et $(C, (\overrightarrow{BC} \mid \overrightarrow{BA}))$.
3. Montrer que $(\overrightarrow{BC} \mid \overrightarrow{BA}) = \frac{1}{2}\left(a^2 + c^2 - b^2\right)$.
4. Montrer que I est le barycentre de $(B, a^2 + b^2 - c^2)$ et $(C, c^2 + a^2 - b^2)$.
5. Montrer que I est le barycentre de $(B, (c^2 + a^2 - b^2)^{-1})$ et $(C, (a^2 + b^2 - c^2)^{-1})$.
6. Montrer que les trois hauteurs du triangle ABC ont un point commun, qui est barycentre de $(A, (b^2 + c^2 - a^2)^{-1})$, $(B, (c^2 + a^2 - b^2)^{-1})$ et $(C, (a^2 + b^2 - c^2)^{-1})$. (Ce point est appelé l'orthocentre du triangle).

Exercice 7

Montrer que les similitudes de $\mathbb{C}$ sont les applications de la forme $z \mapsto az + b$, avec $a, b \in \mathbb{C}$. Quelles sont les similitudes telles que $b = 0$?

Exercice 8

Soient A, B, C, B', C' cinq point du plan. On suppose qu'il existe une similitude de centre A qui envoie B sur B' et C sur C'. Montrer qu'il existe une similitude que envoie B sur C et B' sur C'.

Exercice 9

Soient A, B, A', B' quatre point distincts du plan.

1. Montrer qu'il existe une unique similitude que envoie A sur A' et B sur B'.
2. On suppose que les droites (AB) et $(A'B')$ sont sécantes. Notons I leur point d'intersection, que l'on suppose distinct de A, B, A', B'. Soient $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ les cercles circonscrits à IAA' et IBB' respectivement. On suppose qu'ils ne sont pas tangents.

Soit J le point d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ autre que I. Montrer que J est le centre de la similitude qui envoie A sur A' et B sur B'.