UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie et isométries

Interrogation 3

Durée : 1h
Documents, calculatrices et téléphones sont interdits. La qualité de la rédaction pourra être prise en compte dans la note.

Exercice 1

Soient $\mathscr{E}$ un espace affine, $\mathscr{F}_0$ et $\mathscr{F}_1$ deux sous-espaces affines de $\mathscr{E}$. On note E, F_0 et F_1 les directions de $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}_0$ et $\mathscr{F}_1$ respectivement. On suppose que les sous-espaces F_0 et F_1 sont supplémentaires, i.e. $E = F_0 \oplus F_1$.

1. Montrer que $\mathscr{F}_0$ et $\mathscr{F}_1$ ont un unique point d'intersection.
2. Soit P un point de $\mathscr{E}$. Alors $\mathscr{V}_P = P + F_0$ est l'unique sous-espace affine de $\mathscr{E}$ parallèle à $\mathscr{F}_0$ passant par P. D'après la question précédente, il a un unique point d'intersection avec $\mathscr{F}_1$, que l'on note ici $\pi(P)$. Montrer que l'application $\pi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{F}_1$ ainsi définie (appelée la projection sur $\mathscr{F}_1$ parallèlement à $\mathscr{F}_0$) est une application affine, et décrire sa partie linéaire.

Exercice 2

Compléter la démonstration suivante en cochant les cases qui correspondent au texte manquant (une seule case par emplacement ; des points seront retranchés en cas de réponse fausse).

Théorème 1 (théorème de Pappus)**.** *Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites d'un plan affine euclidien $\mathscr{E}$. Soient A, B, C trois points de $\mathscr{D}$, et A', B', C' trois points de $\mathscr{D}'$. On suppose que :*

- $\{A, B, C\} \cap \mathscr{D}' = \varnothing$;
- *les droites (AB') et $(A'B)$ sont parallèles ;*
- *les droites (BC') et $(B'C)$ sont parallèles.*

Alors les droites (AC') et $(A'C)$ sont parallèles.

Supposons d'abord que les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles. Comme $\mathscr{E}$ est de dimension 2, leurs directions sont $\boxed{1}$, et les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ont un unique point commun, que l'on note O. Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont alors $\boxed{2}$ (puisqu'ils sont dans la direction de $\mathscr{D}$. Comme $O \notin \{A, B, C\}$ (puisque $O \in \mathscr{D}'$ et $\{A, B, C\} \cap \mathscr{D}' = \varnothing$), il existe des constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ telles que $\overrightarrow{OB} = \lambda\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC} = \mu\overrightarrow{OA}$. Notons φ l'homothétie de centre O et de rapport λ, et ψ l'homothétie de centre O et de rapport μ, de sorte que $\varphi(O) = \psi(O) = O$, $\boxed{3}$ et $\psi(A) = C$.

La droite $\mathscr{D}$ est stable par φ. En effet, les homothéties $\boxed{4}$, donc $\varphi(\mathscr{D})$ est la parallèle à $\mathscr{D}$ passant par $\varphi(O) = O$, c'est-à-dire $\mathscr{D}$. On montre de même que $\varphi(\mathscr{D}') = \mathscr{D}'$, $\psi(\mathscr{D}) = \mathscr{D}$ et $\psi(\mathscr{D}') = \mathscr{D}'$.

Si les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles, on note φ la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et ψ la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$, de sorte que $\varphi(A) = B$ et $\psi(A) = C$ comme dans le cas précédent. De plus, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont dans la direction (commune) de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ donc ces deux droites sont stables par φ et ψ.

Les applications φ et ψ sont donc des homothéties ou translations qui envoient A respectivement sur B et C, et qui laissent stables les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. Comme ce sont des $\boxed{5}$, elles transforment les droites en droites parallèles.

L'image par φ de la droite (AB') est la parallèle à (AB') passant par $\varphi(A) = B$, c'est-à-dire la droite $(A'B)$, $\boxed{6}$. Or on a $B' \in \mathscr{D}' \cap (AB')$ donc $\varphi(B') \in \mathscr{D}' \cap (A'B)$. Or le point A' est commun à $\mathscr{D}'$ et $(A'B)$, et ces deux droites ne peuvent pas être confondues puisque $\boxed{7}$. Donc leur intersection $\boxed{8}$, et $\varphi(B') = A'$. De même, on a $\psi(C') = A'$.

Considérons l'application $\psi \circ \varphi^{-1}$. C'est la composée de deux homothéties ou translations, donc c'est une homothétie ou une translation. De plus, elle envoie B sur C.

Si les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles, alors ψ et φ^{-1} sont deux homothéties de centre O (de rapports μ et λ^{-1} respectivement), donc elles commutent : $\psi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi$ est l'homothétie de centre O et de rapport $\lambda^{-1}\mu$.

Si les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles, alors ψ et φ^{-1} sont deux $\boxed{9}$ donc elles commutent. Plus précisément, l'application $\psi \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi$ est la translation de vecteur $\boxed{10}$.

On a donc $(\psi \circ \varphi^{-1})(C') = (\varphi^{-1} \circ \psi)(C') = \varphi^{-1}(A') = B'$. L'image de la droite (BC') par l'homothétie ou translation $\psi \circ \varphi^{-1}$ est donc la droite $(B'C)$, donc $(B'C)$ est parallèle à (BC').

$\boxed{1}$
- ☐ supplémentaires
- ☐ en somme directe
- ☐ complémentaires

$\boxed{2}$
- ☐ colinéaires
- ☐ égaux
- ☐ orthogonaux

$\boxed{3}$
- ☐ $\varphi(A) = B$
- ☐ $\varphi(B) = C$
- ☐ $\varphi(B) = A$

$\boxed{4}$
- ☐ sont des applications affines
- ☐ transforment les droites en droites parallèles
- ☐ laissent stables les droites

$\boxed{5}$
- ☐ isométries
- ☐ homothéties ou translations
- ☐ applications linéaires

$\boxed{6}$
- ☐ par hypothèse
- ☐ car φ est affine
- ☐ puisque $\varphi(B') = A$

$\boxed{7}$
- ☐ $B \notin \mathscr{D}'$
- ☐ $A \notin \mathscr{D}'$
- ☐ $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ seraient parallèles

$\boxed{8}$
- ☐ est réduite au point A'
- ☐ est vide
- ☐ est stable par φ

$\boxed{9}$
- ☐ homothéties
- ☐ translations
- ☐ homothéties ou translations

$\boxed{10}$
- ☐ $-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$
- ☐ $-\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}$
- ☐ $-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$