UNIVERSITÉ DE RENNES 1

**Géométrie euclidienne et isométries**

*Examen (première session) : 2 heures.*

*Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.*

**Rappel concernant les notations :** Soit $\mathscr{E}$ est un espace affine euclidien de direction $E$. Si $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs de $E$, on note $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ leur produit scalaire. Si $A, B$ sont des points de $\mathscr{E}$, on désigne par $AB$ la norme euclidienne du vecteur défini par le bipoint $(A, B)$ i.e.

$$AB := \|\overrightarrow{AB}\|.$$

Si $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ est une application affine, on note $\overrightarrow{f}$ son application linéaire associé.

## Exercice 1

Soient $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ des espaces affines.

**1** Rappeler la définition d'un sous-espace affine de $\mathscr{E}$.

**2** Rappeler la définition d'une application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$.

**3** Soient $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ une application affine et $\mathscr{G}$ un sous-espace affine de $\mathscr{F}$ de direction $G$. Montrer que si $f^{-1}(\mathscr{G})$ n'est pas vide alors il s'agit d'un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ dirigé par

$$\overrightarrow{f}^{-1}(G) = \{x \in E : \overrightarrow{f}(x) \in G\}.$$

## Exercice 2

**1** Énoncer le théorème de classification des isométries affines planes en donnant la nature d'une isométrie en fonction de la dimension de l'ensemble de ses points fixes suivant qu'elle est un déplacement ou un antidéplacement.

**2** Même chose pour les isométries d'un espace affine euclidien de dimension trois.

*(Il ne vous est pas demandé de démontrer ces énoncés).*

## Exercice 3

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien (donc de dimension finie) et soit $F$ un sous-espace de $E$. Notons $F^\perp$ l'orthogonal de $F$. Montrer que $E = F \oplus F^\perp$ et que $(F^\perp)^\perp = F$.

## Exercice 4

On se donne un plan affine euclidien $\mathscr{E}$, un cercle $\mathscr{C}$ de centre $O$ et de rayon $R > 0$. Soit $M$ un point du plan $\mathscr{E}$.

**1** Soit $\mathscr{D}$ une droite passant par $M$ et coupant $\mathscr{C}$ en deux points $A$ et $B$. Montrer que le produit scalaire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ est égal à $MO^2 - R^2$ et ne dépend donc pas de la droite $\mathscr{D}$. Ce nombre est appelé puissance de $M$ par rapport au cercle $\mathscr{C}$ et noté $p_{\mathscr{C}}(M)$.

**2** On suppose que $M$ n'est pas intérieur à $\mathscr{C}$. On note $T$ et $T'$ les points de contacts des tangentes à $\mathscr{C}$ issue de $M$. Montrer que

$$p_{\mathscr{C}}(M) = MT^2 = MT'^2.$$

**3** Déterminer la position de $M$ par rapport à $\mathscr{C}$ en fonction du signe de $p_{\mathscr{C}}(M)$.

## Exercice 5 — Droite et cercle d'Euler

Soient $\mathscr{E}$ un plan euclidien et $ABC$ un triangle de $\mathscr{E}$. On note $O$ le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle $ABC$ (on rappelle qu'il s'agit de l'unique cercle passant par les trois sommets du triangle $ABC$). On note $A'$, $B'$, $C'$ les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ et $G$ l'isobarycentre des points $A, B, C$.

*Le but de cet exercice est de montrer les résultats suivants :*

— *les hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point appelé orthocentre ;*

— *l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit et l'isobarycentre des sommets appartiennent à une même droite (appelée droite d'Euler) ;*

— *les milieux des segments* $[BC]$, $[CA]$ *et* $[AB]$, *les pieds des hauteurs et les milieux des segments joignant l'orthocentre aux sommets appartiennent à un même cercle (appelé cercle d'Euler).*

**1** Faire une figure.

**2** Soit $H$ le point de $\mathscr{E}$ défini par $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

- **a** Montrer que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$ puis en déduire que $H$ appartient à la hauteur du triangle $ABC$ passant par $A$.
- **b** Montrer que les trois hauteurs du triangle $ABC$ sont concourantes au point $H$ (appelé orthocentre) et que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.
- **c** En déduire que les trois points $O, H, G$ appartiennent à une même droite.

Lorsque $ABC$ n'est pas équilatéral, les points $O, H, G$ ne sont pas confondus et il existe une unique droite les contenant (cette droite est appelée la droite d'Euler).

**3** Soit $h$ l'homothétie de centre $G$ et de rapport $-1/2$.

- **a** Déterminer les images, par $h$, des points $A, B, C$.
- **b** Déterminer l'image, par $h$, de l'orthocentre $H$ du triangle $ABC$.
- **c** Justifier que $h(\mathscr{C})$ est un cercle $\mathscr{C}'$ dont le centre $O'$ est le milieu du segment $(OH)$.

**4** Soit $h'$ l'homothétie de centre $H$ et de rapport $1/2$.

- **a** Justifier que $h'$ transforme le point $O$ en le point $O'$ puis que $h'(\mathscr{C}) = \mathscr{C}'$.
- **b** Montrer que $\mathscr{C}'$ contient les points $A', B', C'$ et les milieux des segments $[HA], [HB], [HC]$.
- **c** Montrer que $\mathscr{C}'$ contient les pieds des hauteurs du triangle $ABC$. (Pour montrer que le pied de la hauteur issue de $A$ appartient à $\mathscr{C}'$ on pourra utiliser la projection orthogonale sur la droite $(BC)$ et le théorème de Thalès).