Géométrie et isométries

Compléments sur les sommes directes

Rappelons les définitions suivantes.

Définition 1. *Soit E un espace vectoriel, et soit $(F_i)_{0\leqslant i<m}$ une famille finie[1] de sous-espaces de E. Notons*

$$\sigma\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \prod_{i=0}^{m-1} F_i & \longrightarrow & E \\ (x_i)_{0\leqslant i<m} & \longmapsto & \sum_{i=0}^{m-1} x_i. \end{array} \right.$$

On appelle somme *des sous-espaces F_i le sous-espace $F_0 + \cdots + F_{m-1} \overset{déf}{=} \operatorname{im}\sigma$.*

On dit que les sous-espaces F_i sont en somme directe *si l'application σ est injective. Dans ce cas, on note aussi $F_0 \oplus \ldots \oplus F_{m-1}$ la somme des sous-espaces F_i.*

On dit que deux *sous-espaces de E sont* supplémentaires *s'ils sont en somme directe et si leur somme est E.*

Exercice 1

1. Montrer que deux sous-espaces d'un espace vectoriel E sont en somme directe si et seulement si leur intersection est $\{0\}$.
2. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$ et ses sous-espaces $F_0 = \mathbb{R}\times\{0\}$, $F_1 = \{0\}\times\mathbb{R}$ et $F_2 = \{(x,x)\,;\, x \in \mathbb{R}\}$. Montrer que l'intersection de ces trois sous-espaces est réduite à $\{0\}$ (et même que leurs intersections deux à deux le sont) mais qu'ils ne sont pas en somme directe. Montrer que si E est un espace vectoriel et si $(F_i)_{0\leqslant i<m}$ est une famille finie de sous-espaces de E, alors il y a équivalence entre :
   (*) les sous-espaces F_i sont en somme directe ;
   (*) pour tout entier $i \in \{0,\ldots,m-1\}$ l'intersection de F_i avec la somme des sous-espaces F_j, $j \in \{0,\ldots,m-1\} \smallsetminus \{i\}$, est $\{0\}$.

Exercice 2

Soit E un k-espace vectoriel de dimension finie n.

1. Soit $(e_i)_{0\leqslant i<n}$ une base de E. Montrer que E est la somme directe de droites $k\,e_i$.

[1] Pour une famille infinie, il faut modifier un peu la définition, en remplaçant le produit des espaces F_i par son sous-espace

$$\left\{ (x_i) \in \prod_i E_i \middle/ \{i/x_i \neq 0\}\text{est fini} \right\},$$

appelé la somme directe externe des F_i.

2. Soit $(F_i)_{0 \leqslant i < m}$ une famille finie de sous-espaces de E. On suppose qu'ils sont en somme directe. Montrer que la dimension de leur somme est la somme des dimensions des F_i. (Indication : fixer une base de chacun des F_i, et montrer que la réunion de ces bases est une base de la somme).