Géométrie et isométries

Géométrie affine

Exercice 1

Montrer que l'intersection de deux sous-espaces affines est un sous-espace affine.

Exercice 2

Montrer que par deux points distincts d'un espace affine passe une et une seule droite.

Exercice 3

Montrer que deux hyperplans d'un espace affine qui n'ont aucun point commun sont parallèles.

Exercice 4

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine. Soient $\mathscr{D}$ une droite de $\mathscr{E}$ et $P \in \mathscr{E}$ un point. Montrer qu'il y a une et une seule droite de $\mathscr{E}$ passant par P et parallèle à $\mathscr{D}$.

Exercice 5

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension finie, et soit E l'espace vectoriel sous-jacent. Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ et soit $u \in E$. Montrer que l'image de $\mathscr{F}$ par la translation de vecteur u est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$, de même dimension que $\mathscr{F}$.

Exercice 6

On rappelle qu'une application affine $\varphi\colon \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ (avec $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux espaces affines) est une application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ telle que si $O \in \mathscr{E}$ alors l'application qui à $\overrightarrow{OP}$ associe $\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(P)}$, pour $P \in \mathscr{E}$, est linéaire.

1. Montrer que cette définition ne dépend pas du point O.
2. Montrer que les applications affines préservent l'alignement.
3. Décrire l'application conjuguée d'une translation par une bijection affine.

Exercice 7

Le groupe affine d'un espace affine $\mathscr{E}$ est le groupe des bijections affines de $\mathscr{E}$ sur lui-même. Décrire le groupe affine en dimension 1.

Exercice 8

Soit $\mathscr{E}$ un plan affine. Soient A, B, C et A', B', C' deux triplets de points de $\mathscr{E}$ distincts et non alignés. Montrer qu'il y a une unique application affine f de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ telle que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.

Exercice 9

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine. Si O est un point de $\mathscr{E}$ et si $\lambda \in \mathbb{R}^{\times}$, l'homothétie $\mathrm{h}_{O,\lambda}$ de centre O et de rapport λ est définie par $\overrightarrow{O\mathrm{h}_{O,\lambda}(P)} = \lambda\overrightarrow{OP}$.

1. Montrer que si $\lambda \neq 1$, alors l'homothétie $\mathrm{h}_{O,\lambda}$ a un unique point fixe.
2. Montrer que la composée de deux homothéties est une homothétie ou une translation.
3. Montrer que l'ensemble des homothéties et des translations de $\mathscr{E}$ est un groupe pour la composition des applications.
4. Montrer que les éléments de ce groupe transforment les sous-espaces affines en des sous-espaces affines parallèles.

Exercice 10

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine, et soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ une application affine qui transforme toute droite en une droite parallèle. Montrer que f est une homothétie ou une translation.

Exercice 11

Quel est le centre du groupe affine en dimension $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 12

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension finie. Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille finie de points de $\mathscr{E}$ et $(\alpha_i)_{i\in I}$ une famille de réels telle que $\sum_{i\in I} a_i \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe un unique point $O \in \mathscr{E}$ tel que $\sum_{i\in I} \alpha_i\overrightarrow{OA_i} = 0$. (Ce point s'appelle le barycentre du système de points pondérés $(A_i, \alpha_i)_{i\in I}$).
2. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, alors O est aussi le barycentre du système $(A_i, \lambda\alpha_i)_{i\in I}$.
3. Montrer que l'ensemble des barycentres de deux points distincts (pour toutes les pondérations possibles) est la droite passant par ces deux points.
4. On considère une famille finie de systèmes de points pondérés, $(B_{i,j}, \beta_{i,j})_{j\in J_i}$ pour $i \in I$, telle que $\sum_{j\in J_i} \beta_{i,j} \neq 0$ pour tout $i \in I$ et $\sum_{i\in I}\sum_{j\in J_i} \beta_{i,j} \neq 0$. Notons G_i le barycentre de $(B_{i,j}, \beta_{i,j})_{j\in J_i}$. Montrer que le barycentre du système $(G_i, \sum_{j\in J_i} \beta_{i,j})_{i\in I}$ est le même point que le barycentre du système $(B_{i,j}, \beta_{i,j})_{i\in I, j\in J_i}$. (Cette propriété s'appelle l'associativité du barycentre).
5. Montrer que les médianes d'un triangle sont concourantes.

Exercice 13

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension finie n, et soient $A_0, \dots, A_n$ des points de $\mathscr{E}$ tels qu'aucun sous-espace affine de $\mathscr{E}$ autre que $\mathscr{E}$ ne contienne tous les points $A_0, \dots, A_n$. Montrer que tout point de $\mathscr{E}$ s'écrit comme un barycentre des points $A_0, \dots, A_n$, et que les coefficients du barycentre sont uniques à multiplication par un scalaire près.

Exercice 14

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine, et soit $\mathscr{A}$ une partie de $\mathscr{E}$ telle que tout barycentre de points de $\mathscr{A}$ soit dans $\mathscr{A}$. Montrer que $\mathscr{A}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$.

Exercice 15

Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ deux espaces affines, et soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ une application (ensembliste). On suppose que, pour toute famille finie $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ de points de $\mathscr{E}$ pondérés telle que $\sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$, l'image par f du barycentre de $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ est le barycentre de $(f(A_i), \lambda_i)_{i \in I}$. Montrer que f est une application affine.

Exercice 16

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine, et soit E l'espace vectoriel sous-jacent. Montrer que le groupe affine $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ est en bijection avec $\mathrm{GL}(E) \times E$. Est-ce un isomorphisme de groupes ?

Exercice 17

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine. Soient $\mathscr{H}$, $\mathscr{H}'$, $\mathscr{H}''$ trois hyperplans parallèles de $\mathscr{E}$. Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites dont la direction n'est pas contenue dans celle de $\mathscr{H}$.

1. Montrer que $\mathscr{D} \cap \mathscr{H}$ est un singleton.
2. Notons A, A', A'' les intersections de $\mathscr{D}$ avec $\mathscr{H}$, $\mathscr{H}'$, $\mathscr{H}''$ respectivement, et B, B', B'' les intersections de $\mathscr{D}'$ avec $\mathscr{H}$, $\mathscr{H}'$, $\mathscr{H}''$ respectivement. On suppose $\mathscr{H} \neq \mathscr{H}'$. Montrer qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{AA''} = \lambda \overrightarrow{AA'}$.
3. Montrer que $\overrightarrow{BB''} = \lambda \overrightarrow{BB'}$.