UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie et isométries

Géométrie affine euclidienne

Exercice 1

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien, et soient A et B deux points de $\mathscr{E}$. On définit le milieu I de A et B comme l'isobarycentre de A et B (i.e. le barycentre du système $\{(A,1),(B,1)\}$). Montrer que I est équidistant de A et B.

Exercice 2

Soient A et B deux points distincts d'un espace affine euclidien $\mathscr{E}$. Montrer que les trois ensembles suivants sont égaux :

(i) l'ensemble des points équidistants de A et B,

(ii) l'hyperplan orthogonal à la droite passant par A et B et qui contient le milieu (isobarycentre) de A et B,

(iii) l'ensemble des points fixes de l'unique réflexion qui échange A et B.

Cet ensemble est appelé l'hyperplan médiateur (ou, en dimension 2, la médiatrice) du segment $[AB]$.

Exercice 3

Soient A et B deux points distincts d'un espace affine euclidien $\mathscr{E}$. Quel est le lieu des points M tels que les droites (MA) et (MB) soient orthogonales ?

Exercice 4

Soient A, B, C trois points d'un plan euclidien $\mathscr{E}$. On note $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Soit I le milieu du segment $[BC]$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(b^2 + c^2 - a^2\right)$.
2. Calculer AI^2 à l'aide de b, c et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
3. En déduire que $AI^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$.

Exercice 5

Soient A, B, C trois points d'un plan euclidien $\mathscr{E}$. On note $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Soit I l'image de A par projection orthogonale sur la droite (BC). La droite (AI) est appelée la hauteur du triangle ABC issue de A. On suppose que le triangle ABC n'est pas rectangle, i.e. qu'il n'y a pas deux droites orthogonales parmis (AB), (BC) et (CA).

1. Montrer que $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CI}$.
2. Montrer que I est le barycentre de $(B, \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA})$ et $(C, \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA})$.
3. Montrer que $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\left(a^2 + c^2 - b^2\right)$.
4. Montrer que I est le barycentre de $(B, a^2 + b^2 - c^2)$ et $(C, c^2 + a^2 - b^2)$.
5. Montrer que I est le barycentre de $(B, (c^2 + a^2 - b^2)^{-1})$ et $(C, (a^2 + b^2 - c^2)^{-1})$.
6. Montrer que les trois hauteurs du triangle ABC ont un point commun, qui est barycentre de $(A, (b^2 + c^2 - a^2)^{-1})$, $(B, (c^2 + a^2 - b^2)^{-1})$ et $(C, (a^2 + b^2 - c^2)^{-1})$. (Ce point est appelé l'orthocentre du triangle).

Exercice 6

Dans un plan euclidien $\mathscr{E}$, soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon r, et A un point. Soit $\mathscr{D}$ une droite passant par A et qui coupe $\mathscr{C}$ en deux points M et M'. On appelle *puissance de A par rapport à $\mathscr{C}$* le réel $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM'}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM'} = AO^2 - r^2$.
2. La puissance de A par rapport à $\mathscr{C}$ dépend-elle du choix de la droite $\mathscr{D}$?
3. Quel est l'ensemble des points ayant une puissance donnée par rapport à $\mathscr{C}$?
4. Soit $\mathscr{C}'$ un autre cercle. Quel est l'ensemble des points ayant même puissance par rapport à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$?

Exercice 7

Soit $\mathscr{E}$ un plan affine euclidien, et soit E l'espace vectoriel sous-jacent.

1. Soient $u, v \in E \setminus \{0\}$. Montrer qu'il existe une unique rotation qui transforme $\frac{u}{\|u\|}$ en $\frac{v}{\|v\|}$.
2. On note θ l'angle de cette rotation, en ayant fixé une orientation de E. On l'appelle la mesure de l'angle $(\widehat{u, v})$. Montrer que le produit scalaire $u \cdot v$ est égal à $\|u\| \, \|v\| \cos\theta$.
3. Soient A, B, C trois points distincts de $\mathscr{E}$. Soient a la distance entre B et C, b la distance entre C et A, c la distance entre A et B. Soit θ la mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$. Montrer que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$.

Exercice 8

Dans un plan affine euclidien orienté $\mathscr{E}$, soit ρ une rotation de centre O et d'angle θ, et soit σ la réflexion par rapport à une droite $\mathscr{D}$. Décrire l'isométrie $\sigma \circ \rho \circ \sigma$.

Exercice 9

Soient A, B, C trois points d'un plan euclidien $\mathscr{E}$. On suppose que C est sur la médiatrice du segment $[AB]$. Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = -(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})$. (Indication : utiliser une réflexion bien choisie).

Exercice 10

Dans un plan euclidien $\mathscr{E}$, soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O, et soient A, B, C trois points distincts de $\mathscr{C}$. Montrer que $2(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$. (Indication : utiliser l'exercice précédent).

Exercice 11

Soient A, B, C, A', B', C' six points d'un plan affine euclidien $\mathscr{E}$. On suppose les égalités de distances suivantes : $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$. Montrer qu'il existe une isométrie σ de $\mathscr{E}$ telle que $\sigma(A) = A'$, $\sigma(B) = B'$ et $\sigma(C) = C'$.

Exercice 12

Soient A, B, A', B' quatre points d'un plan affine euclidien $\mathscr{E}$. On suppose l'égalité de distances $AB = A'B'$. Construire à la règle et au compas le centre de la rotation ρ telle que $\rho(A) = A'$ et $\rho(B) = B'$, quand une telle rotation existe. Que se passe-t-il quand il n'existe pas de telle rotation ?

Exercice 13

Soient A, B, C, D quatre points d'un plan affine euclidien orienté $\mathscr{E}$. On suppose que la droite (AB) est parallèle à (CD), que (AD) est parallèle à (BC) et que (AB) est orthogonale à (AD). Décrire le groupe des isométries de $\mathscr{E}$. qui laissent stable l'ensemble $\{A, B, C, D\}$?

Exercice 14

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension finie et soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$.

1. Montrer qu'il existe un point P de $\mathscr{E}$ fixe par G.
2. Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$, où E est l'espace vectoriel sous-jacent à $\mathscr{E}$.
3. Montrer qu'il existe un produit scalaire invariant par (la partie linéaire des éléments de) G.
4. Montrer qu'il existe une bijection affine $f : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ telle que le conjugué de G par f soit formé d'isométries qui laissent fixe le point P.