Préparation à l'agrégation

TP Algèbre linéaire

Utilisation de Sage

Exercice 1

Consulter le manuel de référence, en particulier

- `http://doc.sagemath.org/html/en/reference/modules/sage/modules/free_module.html`
- `http://doc.sagemath.org/html/en/reference/modules/sage/modules/vector_space_morphism.html`
- `http://doc.sagemath.org/html/en/reference/matrices/index.html`
- `http://doc.sagemath.org/html/en/reference/matrices/sage/matrix/docs.html`
- `http://doc.sagemath.org/html/en/reference/matrices/sage/matrix/matrix0.html`
- `http://doc.sagemath.org/html/en/reference/matrices/sage/matrix/matrix1.html`
- `http://doc.sagemath.org/html/en/reference/matrices/sage/matrix/matrix2.html`

Les exercices suivants visent à employer les outils fournis par Sage. L'objectif est de faire le calcul de manière aussi concise que possible, surtout pas de reprogrammer les algorithmes soi-même.

Exercice 2

Dans $\mathbb{R}^4$, donner une base de l'intersection des sous-espaces engendrés respectivement par $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$ et $(0, 0, 1, 1)$, et par $(0, 1, 2, 3)$, $(3, 2, 1, 0)$ et $(2, 3, 5, 7)$.

Exercice 3

Le vecteur $(-6, 0, 5, 10)$ est-il dans le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par $(0, 1, 2, 3)$, $(3, 2, 1, 0)$ et $(2, 3, 5, 7)$?

Exercice 4

Résoudre un système linéaire aléatoire sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 5

Trouver les valeurs propres de la matrice $(i^2 + j^2)_{1\leqslant i,j\leqslant 4}$.

Exercice 6

Trouver un polynôme irréductible Q de degré 5 sur $\mathbb{F}_7$ et trouver la matrice du morphisme de Frobenius de $\mathbb{F}_{7^5} \simeq \mathbb{F}_7[X]/(Q(X))$ dans la base 1, X, ..., X^4. Trouver ses valeurs propres.

Exercices d'algèbre linéaire

Exercice 7

Dans $\mathbb{R}^4$, on cherche une base de l'intersection des sous-espaces engendrés respectivement par $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$ et $(0,0,1,1)$, et par $(0,1,2,3)$, $(3,2,1,0)$ et $(2,3,5,7)$. Cet exercice a été fait avec Sage ci-dessus, mais on veut ici comprendre comment se programme la résolution d'un tel problème.

1. Écrire ces deux sous-espaces comme des intersections de noyaux de formes linéaires (à l'aide de manipulations de matrices en Sage), puis en déduire leur intersection comme un noyau de matrice, et utiliser Sage pour en trouver une base.
2. Voici une autre méthode. Écrire la matrice d'une application $\Psi\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ donnée par $\Psi(x,y) = f(x) - g(y)$ où f a pour image le premier sous-espace et g a pour image le second. Obtenir avec Sage une base du noyau de Ψ, puis prendre l'image par f des premières composantes de ces vecteurs. En déduire une base de l'intersection recherchée.

Exercice 8

Calculer la décomposition de Dunford $M = D+N$ (avec D diagonalisable, N nilpotente et $DN = ND$) de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -6 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

à l'aide d'une suite d'itérations de Newton

$$X_{n+1} = X_n - \frac{P(X_n)}{P'(X_n)}$$

où P est le radical du polynôme caractéristique de M, en partant de M. Quand la suite devient stationnaire, on obtient D.

Algorithmes d'algèbre linéaire

Les exercices de cette partie visent à programmer des algorithmes classiques d'algèbre linéaire, comme le pivot de Gauss, plutôt que d'utiliser les méthodes fournies par Sage.

Les programmes réalisés devront être testés à l'aide de systèmes à coefficients choisis aléatoirement.

Exercice 9

Programmer la réduction à la forme triangulaire par pivot de Gauss (en prenant comme argument une matrice rectangulaire quelconque), puis l'utiliser pour programmer la résolution simultanée de systèmes $Ax = b$ ayant la même matrice A. (On pourra prévoir pour cela un argument de la fonction pivot de Gauss indiquant jusqu'à quelle colonne les permutations de colonnes sont autorisées).

On pourra dans un premier temps, pour simplifier, se limiter au cas où A est inversible, avant d'aborder le cas général. Le programme doit néanmoins fonctionner correctement pour toutes les matrices inversibles.

Exercice 10

Programmer une fonction de résolution de systèmes $Ax = b$, pour A à coefficients réels (flottants), utilisant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt appliqué à la matrice A. Comparer au pivot de Gauss (temps de calcul, précision).

Exercice 11

Programmer le calcul du déterminant d'une matrice à coefficients entiers par la méthode de Gauss-Bareiss.

Programmer le même calcul à l'aide du pivot de Gauss sur les corps finis, du théorème chinois et de la borne de Hadamard.

Exercice 12 : méthode de Lanczos

La méthode de Lanczos est un algorithme qui permet (entre autres) de résoudre des systèmes $Ax = b$ quand la matrice A est grande, mais creuse.

Pour des raisons de simplicité, on supposera ici que le matrice A est à coefficients réels, symétrique et inversible. On note q la forme quadratique définie de matrice A dans la base canonique.

On ne cherchera pas à optimiser le stockage de la matrice A au-delà de ce que permet Sage. En revanche, le programme ne devra utiliser que des multiplications matrice $\times$ vecteur, et aucune multiplication matrice $\times$ matrice.

En appliquant l'algorithme d'orthonormalisation de Schmidt à la famille b, Ab, A^2b, A^3b, ..., construire une base e_0, e_1, e_{m-1} du sous-espace engendré par cette famille, qui soit q-orthonormée.

Montrer ensuite que

$$x = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{e_i \cdot b}{e_i \cdot Ae_i} e_i,$$

où $\cdot$ désigne la forme bilinéaire symétrique de matrice identité dans la base canonique (i.e. le produit scalaire usuel).

Montrer que

$$e_i = Ae_{i-1} - \frac{Ae_{i-1} \cdot Ae_{i-1}}{e_{i-1} \cdot Ae_{i-1}} e_{i-1} - \frac{Ae_{i-1} \cdot Ae_{i-2}}{e_{i-1} \cdot Ae_{i-2}} e_{i-2}.$$

(Cette question peut demander un peu de réflexion et peut être admise dans un premier temps.)

Programmer cet algorithme.