UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie et isométries

Interrogation 1

Durée de l'interrogation : 1h.

Les documents, calculatrices, ordinateurs, téléphones portables et montres connectées sont interdits.

La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la note.

Exercice 1

Énoncer et démontrer l'inégalité de Minkowski (dans un espace vectoriel euclidien).

- Toutes les hypothèses, y compris la nature des espaces où se trouvent les variables, doivent être explicitées.
- Les cas d'égalité doivent être énoncés et démontés.
- Si l'inégalité de Cauchy-Schwarz est utilisée, elle doit aussi être démontrée.

Exercice 2

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Soit $v = (1, 2, 2)$.

1. Si $x \in E$, montrer qu'il existe un unique vecteur $\pi(x) \in \mathbb{R}v$ tel que $x - \pi(x)$ soit orthogonal à v.
2. Montrer que l'application

$$\sigma : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & 2\pi(x) - x \end{array} \right.$$

   est une isométrie vectorielle.
3. Montrer que l'application σ est une involution, i.e. $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_E$.
4. Écrire la matrice de l'application σ dans la base canonique.
5. Donner une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de σ est sous forme normale et écrire cette matrice.