UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie et isométries

Orthogonalité et isométries

Exercice 1

1. Appliquer l'algorithme d'orthonormalisation de Schmidt à la base suivante de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -23 \\ 16 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 25 \\ -35 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

2. Quelles sont les coordonnées du vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dans la base orthonormée obtenue ?

Exercice 2

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$, pour $n \geqslant 2$, muni de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad (\forall x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in E).$$

Montrer qu'il n'existe pas de produit scalaire $(u, v) \mapsto u \cdot v$ sur E tel que $\|x\|_1^2 = x \cdot x$ $(\forall x \in E)$.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel euclidien (donc de dimension finie) et soit F un sous-espace de E. Notons $F^\perp$ l'orthogonal de F. Montrer que $E = F \oplus F^\perp$ et que $(F^\perp)^\perp = F$.

Exercice 4

Y a-t-il un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ tel que $(1, 2)$ et $(1, 3)$ forment une base orthonormée ?

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel euclidien, et soient F et G deux sous-espaces de E. Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice 6

Soit E un espace vectoriel euclidien. Notons $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit $v \in E \setminus \{0\}$.

1. Soit $x \in E$. Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(x - \lambda v) \cdot v = 0$. Donner une formule pour λ (en fonction de x et v).
2. Montrer que si $y \in \mathbb{R}v$, alors $\|x - y\| \geqslant \|x - \lambda v\|$, avec égalité si et seulement si $y = \lambda v$ (i.e. il existe un unique $y \in \mathbb{R}v$ qui minimise $\|x - y\|$, et c'est $y = \lambda v$).
3. Montrer que l'application $\pi \colon E \to E$ définie par $\pi(x) = \frac{v \cdot x}{\|v\|^2} v$ est un projecteur (i.e. un endomorphisme idempotent).
4. Quel est le noyau de π ?

Exercice 7

Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base orthonormée de l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$. Écrire la matrice de Gram de la famille $(e_1, \ldots, e_n)$. En déduire le carré du déterminant de $(e_1, \ldots, e_n)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 8

Rappeler l'énoncé de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et compléter la preuve ci-dessous.
Soient E un espace vectoriel $\boxed{1}$, et x et y deux éléments de E. Notons $(u, v) \mapsto u \cdot v$ le produit scalaire de E, et $u \mapsto \|u\| = \sqrt{u \cdot u}$ $\boxed{2}$.
Si $x = 0$, on a $|x \cdot y| = 0 = \|x\| \, \|y\|$.
Si $x \neq 0$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\|\lambda x + y\|^2 = (\lambda x + y) \cdot (\lambda x + y)$$

par $\boxed{3}$, donc

$$\|\lambda x + y\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda x \cdot y + \|y\|^2$$

$\boxed{4}$. Cette dernière expression est un polynôme de degré 2 en λ, puisque $\boxed{5}$.
Comme $\|\lambda x + y\|^2 \geqslant 0$ quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$, le discriminant de ce polynôme est $\boxed{6}$. On a donc $(x \cdot y)^2 \leqslant \|x\|^2 \|y\|^2$, donc $|x \cdot y| \leqslant \|x\| \, \|y\|$.

$\boxed{1}$
- ☐ réel
- ☐ euclidien
- ☐ de dimension finie

$\boxed{2}$
- ☐ la forme linéaire associée
- ☐ la norme euclidienne associée
- ☐ le carré scalaire

$\boxed{3}$
- ☐ positivité du produit scalaire
- ☐ bilinéarité
- ☐ définition de la norme

$\boxed{4}$
- ☐ par polarisation
- ☐ en développant par bilinéarité
- ☐ par définition du produit scalaire

$\boxed{5}$
- ☐ $x \neq 0$
- ☐ le produit scalaire est bilinéaire
- ☐ $\lambda \in \mathbb{R}$

$\boxed{6}$
- ☐ positif
- ☐ négatif
- ☐ nul

Exercice 9

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant (b-a)^{1/2} \left(\int_a^b f(t)^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

Exercice 10

Soit E un espace vectoriel euclidien. Notons $\|\cdot\|$ la norme associée. Soient $x, y \in E$. Montrer que l'on a $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ si et seulement si $x = 0$ ou $y = \lambda x$ pour un réel $\lambda \geqslant 0$.

Exercice 11

Montrer qu'une application linéaire entre deux espaces vectoriels euclidiens, qui préserve la norme, préserve le produit scalaire.

Exercice 12

Les applications linéaires suivantes sont-elles des isométries ?

i. Le morphisme nul.
ii. L'identité.
iii. Une homothétie.
iv. L'endomorphisme
$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} & \longmapsto & (x_{\sigma(i)})_{1\leqslant i\leqslant n}, \end{array}\right.$$
où σ est une permutation de $\{1, ..., n\}$ et $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire usuel.
v. L'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ (muni du produit scalaire usuel) de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.
vi. L'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ (muni du produit scalaire usuel) de matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
vii. L'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ (muni du produit scalaire usuel) de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.
viii. L'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ (muni du produit scalaire usuel) de matrice $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ dans la base canonique.
ix. L'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ (muni du produit scalaire usuel) de matrice $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

x. L'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ (muni du produit scalaire usuel) de matrice $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Exercice 13

Soit E un espace vectoriel euclidien, et soit f un endomorphisme de E, de rang 1. Pour quels endomorphismes f l'application $x \mapsto x + f(x)$ est-elle une isométrie vectorielle ?

Exercice 14

Soit $f\colon E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels euclidiens de même dimension n. Soient (e_i) une base orthonormée de E et (f_j) une base orthonormée de F. On note $A = (a_{ij})$ la matrice de f pour les bases (e_i) et (f_j). Montrer l'équivalence des propriétés suivantes.

(i) Le morphisme f est une isométrie.
(ii) Les colonnes de la matrice A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ (muni du produit scalaire usuel).
(iii) Les lignes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
(iv) ${}^{\mathrm{t}}A\,A = I$
(v) $A\,{}^{\mathrm{t}}A = I$

Exercice 15

Soient a et b deux vecteurs unitaires distincts de $\mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe une unique réflexion qui échange a et b. Déterminer le plan de réflexion.

Exercice 16

Soit E un espace vectoriel euclidien, et soit f un endomorphisme de E. On suppose que f est une involution, i.e. $f \circ f = \mathrm{id}_E$. Montrer que f est une isométrie si et seulement si $f = 2\pi - \mathrm{id}$ pour π la projection orthogonale sur un certain sous-espace de E.

Exercice 17

Soit E un espace vectoriel euclidien, et soit f une isométrie de E. Montrer que le noyau et l'image de $f - \mathrm{id}_E$ sont supplémentaires orthogonaux.

Exercice 18

Montrer que la matrice dans une base orthonormée d'une isométrie vectorielle en dimension 2 est de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \qquad (\theta \in \mathbb{R})$$

Donner le polynôme caractéristique de ces matrices. Quelles sont les isométries vectorielles diagonalisables (sur $\mathbb{R}$) ?

Exercice 19

1. Montrer qu'en dimension 2, une isométrie vectorielle de déterminant -1 est une réflexion.
2. Montrer qu'en dimension 3, toute isométrie vectorielle directe (i.e. une rotation) a une droite formée de points fixes.

Exercice 20

Classifier les isométries en dimension 3.

Exercice 21

Soient E un espace vectoriel euclidien et f une isométrie de E. Soit F un sous-espace de E stable par f. Montrer que $F^{\perp}$ est aussi stable par f.

Exercice 22

Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Schmidt aux familles de vecteurs suivantes, et compléter la famille obtenue en une base de l'espace vectoriel euclidien considéré.

i. $(1, 0, 1)$, $(2, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$;
ii. $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$;
iii. $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 1, 1, 1)$, $(2, 3, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 23

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$, muni du produit scalaire

$$(P, Q) \longmapsto P \cdot Q = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.
2. On applique le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à la base 1, X, X^2, X^3, … Calculer les quatre premiers vecteurs de la base orthonormée $(P_n)_{n\geqslant 0}$ ainsi obtenue.
3. Notons $\ell(Q)$ le coefficient dominant du polynôme Q. Montrer que l'on obtient la même base orthonormée en partant de 1, $\ell(P_0)^{-1}XP_0$, $\ell(P_1)^{-1}XP_1$, $\ell(P_2)^{-1}XP_2$, …
4. Montrer que si $i \leqslant j-2$, alors $P_i \cdot (XP_j) = 0$.
5. Montrer que l'on a une relation de récurrence de la forme

$$P_n = (a(n)X + b(n))\,P_{n-1} + c(n)P_{n-2} \qquad (\forall n \geqslant 2).$$

Exercice 24

Montrer que deux réflexions distinctes d'un plan vectoriel euclidien commutent si et seulement si leurs axes sont orthogonaux.

Exercice 25

Soit E un espace vectoriel euclidien, de dimension n. Notons $(u,v) \mapsto u \cdot v$ le produit scalaire. Soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ une famille d'éléments de E, telle que

$$e_i \cdot e_j < 0 \qquad (\forall i, j \in \{1, ..., m\}, i \neq j).$$

Montrer que $m \leqslant n+1$.

Exercice 26

Soient E et F deux espaces vectoriels euclidiens. On note $(u,v) \mapsto u \bullet_E v$ et $(u,v) \mapsto u \bullet_F v$ leurs produits scalaires respectifs.

1. Montrer que l'application $\varphi_E \colon x \mapsto (u \mapsto x \bullet_F u)$ réalise un isomorphisme de E sur l'espace E^* dual de E, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires sur E.
2. Soit $f \colon E \to F$ une application linéaire. Montrer que $\tilde{f} \colon \ell \mapsto \ell \circ f$ est une application linéaire de F^* dans E^*.
3. On fixe une base orthonormée de E et une base orthonormée de F. Décrire la matrice de $\varphi_E^{-1} \circ \tilde{f} \circ \varphi_F$ en fonction de celle de f.

Exercice 27

Soit $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$, et soient $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, ... les familles de vecteurs obtenues au cours de l'application du procédé d'orthonormalisation à la famille $\mathcal{F}$. Calculer le déterminant de $\mathcal{F}_{i+1}$ (dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$) en fonction de celui de $\mathcal{F}_i$ (et d'un réel intervenant à cette étape du procédé d'orthonormalisation). En déduire une méthode de calcul de déterminants (au signe près) basée sur le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, et calculer par cette méthode la valeur absolue du déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 28

1. Montrer que toute matrice inversible est produit d'une matrice triangulaire inférieure par une matrice orthogonale.
2. Utiliser cette décomposition pour résoudre le système suivant.

$$\begin{cases} 3x + 4y = 10 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

Exercice 29

Soit E un espace vectoriel euclidien.

1. Soit D une droite de E. Montrer qu'il existe une isométrie de E dont l'ensemble des points fixes est D.
2. Quel est le centre du groupe des isométries de E ?

Exercice 30

Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ pour lequel les éléments de G sont des isométries.
2. En déduire que G est le conjugué d'un sous-groupe fini du groupe des matrices orthogonales de taille n.

Exercice 31

Soient E et F deux espaces vectoriels euclidiens. Soit $f\colon E \to F$ une application (ensembliste) telle que $f(0) = 0$ et f préserve les distances (i.e. $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$, quels que soient $x, y \in E$). Montrer que f est une isométrie (en particulier, f est linéaire).

Montrer que ce n'est plus vrai si l'on omet l'hypothèse $f(0) = 0$.

Soit $\theta\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une application, et soit $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = ze^{i\theta(|z|)}$. On munit $\mathbb{C}$ du produit scalaire $(u, v) \mapsto \mathrm{Re}(\overline{u}v)$. Montrer que l'application f vérifie $f(0) = 0$ et $\|f(z)\| = \|z\|$ $(\forall z \in \mathbb{C})$. Montrer que f est une isométrie si et seulement si θ est constante modulo $2\pi\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 32

Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit C un convexe fermé de E. (Rappelons qu'une partie C de E est dite convexe si quels que soient $x, y \in C$ le segment $[x, y]$, i.e. l'ensemble des $(1-\lambda)x + \lambda y$ pour $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, est contenu dans C). Soit $x \in E$. Montrer qu'il existe une unique $p(x) \in C$ tel que la distance $\|x - p(x)\|$ soit minimale.

Montrer que si C est un sous-espace vectoriel de E, alors $p(x)$ est le projeté orthogonal de x sur E.

Montrer que l'application p vérifie $\|p(x) - p(y)\| \leqslant \|x - y\|$ $(\forall x, y \in E)$.