

Exercice 1

Soit \mathcal{E} un espace affine euclidien, et soient A et B deux points de \mathcal{E} . On définit le milieu I de A et B comme l'isobarycentre de A et B (i.e. le barycentre du système $\{(A, 1), (B, 1)\}$). Montrer que I est équidistant de A et B .

Exercice 2

Soient A et B deux points distincts d'un espace affine euclidien \mathcal{E} . Montrer que les trois ensembles suivants sont égaux :

- (i) l'ensemble des points équidistants de A et B ,
- (ii) l'hyperplan orthogonal à la droite passant par A et B et qui contient le milieu (isobarycentre) de A et B ,
- (iii) l'ensemble des points fixes de l'unique réflexion qui échange A et B .

Cet ensemble est appelé l'hyperplan médiateur (ou, en dimension 2, la médiatrice) du segment $[AB]$.

Exercice 3

Soient A et B deux points distincts d'un espace affine euclidien \mathcal{E} . Quel est le lieu des points M tels que les droites (MA) et (MB) soient orthogonales ?

Exercice 4

Soient A, B, C trois points d'un plan euclidien \mathcal{E} . On note $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Soit I le milieu du segment $[BC]$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$.
2. Calculer AI^2 à l'aide de b, c et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
3. En déduire que $AI^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$.

Exercice 5

Soient A, B, C trois points d'un plan euclidien \mathcal{E} . On note $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Soit I l'image de A par projection orthogonale sur la droite (BC) . La droite (AI) est appelée la hauteur du triangle ABC issue de A . On suppose que le triangle ABC n'est pas rectangle, i.e. qu'il n'y a pas deux droites orthogonales parmi (AB) , (BC) et (CA) .

1. Montrer que $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CI}$.

2. Montrer que I est le barycentre de $(B, \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA})$ et $(C, \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA})$.
3. Montrer que $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2)$.
4. Montrer que I est le barycentre de $(B, a^2 + b^2 - c^2)$ et $(C, c^2 + a^2 - b^2)$.
5. Montrer que I est le barycentre de $(B, (c^2 + a^2 - b^2)^{-1})$ et $(C, (a^2 + b^2 - c^2)^{-1})$.
6. Montrer que les trois hauteurs du triangle ABC ont un point commun, qui est barycentre de $(A, (b^2 + c^2 - a^2)^{-1})$, $(B, (c^2 + a^2 - b^2)^{-1})$ et $(C, (a^2 + b^2 - c^2)^{-1})$.
(Ce point est appelé l'orthocentre du triangle).

Exercice 6

Dans un plan euclidien \mathcal{E} , soit \mathcal{C} un cercle de centre O et de rayon r , et A un point. Soit \mathcal{D} une droite passant par A et qui coupe \mathcal{C} en deux points M et M' . On appelle *puissance de A par rapport à \mathcal{C}* le réel $\overline{AM} \cdot \overline{AM'}$.

1. Montrer que $\overline{AM} \cdot \overline{AM'} = AO^2 - r^2$.
2. La puissance de A par rapport à \mathcal{C} dépend-elle du choix de la droite \mathcal{D} ?
3. Quel est l'ensemble des points ayant une puissance donnée par rapport à \mathcal{C} ?
4. Soit \mathcal{C}' un autre cercle. Quel est l'ensemble des points ayant même puissance par rapport à \mathcal{C} et \mathcal{C}' ?

Exercice 7

Soit \mathcal{E} un plan affine euclidien, et soit E l'espace vectoriel sous-jacent.

1. Soient $u, v \in E \setminus \{0\}$. Montrer qu'il existe une unique rotation ρ qui transforme $\frac{u}{\|u\|}$ en $\frac{v}{\|v\|}$.
2. On fixe une orientation de E . Montrer que la matrice de ρ est la même dans toutes les bases orthonormées directes. (Cette propriété serait-elle encore vraie en dimension 3 ?)
3. Montrer qu'il existe un unique $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tel que la matrice de ρ dans une base orthonormée directe soit $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. On l'appelle la mesure de l'angle $(\widehat{u, v})$.
4. Montrer que le produit scalaire $u \cdot v$ est égal à $\|u\| \|v\| \cos \theta$.
5. Soient A, B, C trois points distincts de \mathcal{E} . Soient a la distance entre B et C , b la distance entre C et A , c la distance entre A et B . Soit θ la mesure de l'angle $(\widehat{AB, AC})$. Montrer que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta$.

Exercice 8

Dans un plan affine euclidien orienté \mathcal{E} , soit ρ une rotation de centre O et d'angle θ , et soit σ la réflexion par rapport à une droite \mathcal{D} . Décrire l'isométrie $\sigma \circ \rho \circ \sigma$.

Exercice 9

Soient A, B, C trois points d'un plan euclidien \mathcal{E} . On suppose que C est sur la médiatrice du segment $[AB]$. Montrer que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$. (Indication : utiliser une

réflexion bien choisie).

Exercice 10

Dans un plan euclidien \mathcal{E} , soit \mathcal{C} un cercle de centre O , et soient A, B, C trois points distincts de \mathcal{C} . Montrer que $2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. (Indication : utiliser l'exercice précédent).

Exercice 11

Soient A, B, C, A', B', C' six points d'un plan affine euclidien \mathcal{E} . On suppose les égalités de distances suivantes : $AB = A'B', BC = B'C', CA = C'A'$. Montrer qu'il existe une isométrie σ de \mathcal{E} telle que $\sigma(A) = A', \sigma(B) = B'$ et $\sigma(C) = C'$.

Exercice 12

Soient A, B, A', B' quatre points d'un plan affine euclidien \mathcal{E} . On suppose l'égalité de distances $AB = A'B'$. Construire à la règle et au compas le centre de la rotation ρ telle que $\rho(A) = A'$ et $\rho(B) = B'$, quand une telle rotation existe. Que se passe-t-il quand il n'existe pas de telle rotation ?

Exercice 13

Soient A, B, C, D quatre points d'un plan affine euclidien orienté \mathcal{E} . On suppose que la droite (AB) est parallèle à (CD) , que (AD) est parallèle à (BC) et que (AB) est orthogonale à (AD) . Décrire le groupe des isométries de \mathcal{E} . qui laissent stable l'ensemble $\{A, B, C, D\}$?

Exercice 14

Soit \mathcal{E} un espace affine euclidien de dimension finie et soit G un sous-groupe fini de $\text{GA}(\mathcal{E})$.

1. Montrer qu'il existe un point P de \mathcal{E} fixe par G .
2. Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe fini de $\text{GL}(E)$, où E est l'espace vectoriel sous-jacent à \mathcal{E} .
3. Montrer qu'il existe un produit scalaire invariant par (la partie linéaire des éléments de) G .
4. Montrer qu'il existe une bijection affine $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ telle que le conjugué de G par f soit formé d'isométries qui laissent fixe le point P .