UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie et isométries

Géométrie affine euclidienne 2

Exercice 1

Soient A, B, C trois points non alignés d'un plan affine euclidien $\mathcal{E}$.

1. Montrer que les médiatrices des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ sont concourantes.
2. Notons :
   - $\mathcal{D}_A$ la parallèle à (BC) passant par A ;
   - $\mathcal{D}_B$ la parallèle à (CA) passant par B ;
   - $\mathcal{D}_C$ la parallèle à (AB) passant par C ;
   - A' le point d'intersection de $\mathcal{D}_B$ et $\mathcal{D}_C$ (pourquoi existe-t-il ? pourquoi est-il unique ?) ;
   - B' le point d'intersection de $\mathcal{D}_C$ et $\mathcal{D}_A$;
   - C' le point d'intersection de $\mathcal{D}_A$ et $\mathcal{D}_B$.

   Montrer que $\overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC'}$.
3. Montrer que B est le milieu du segment $[C'A']$.
4. En déduire que les hauteurs du triangle ABC sont concourantes.

Exercice 2

Soit $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ une famille finie de points pondérés d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$. On considère la fonction (dite « fonction scalaire de Leibniz »)

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \sum_{i \in I} \lambda_i \, PA_i^2. \end{array} \right.$$

1. Si $\lambda = \sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$, montrer que $f(P) = f(G) + \lambda \, PG^2$ $(\forall P \in \mathcal{E})$, où G est le barycentre de la famille $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$.
2. Si $\lambda = 0$, montrer que $f(P') - f(P) = u \cdot \overrightarrow{PP'}$ $(\forall P, P' \in \mathcal{E})$, pour un certain vecteur u que l'on déterminera.

Exercice 3

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien, et soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. On note E et F leurs directions respectives. Soit $A \in \mathcal{E}$. On note $\mathcal{F}'$ le sous-espace affine passant par A et de direction $F^\perp$.

1. Montrer que $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}'$ est un singleton $\{B\}$.
2. Montrer qu'il y a un unique point $B' \in \mathcal{F}$ qui minimise la distance AB', et que c'est le point B.
3. Soit $\mathcal{C}$ une partie de $\mathcal{E}$. On dit que $\mathcal{C}$ est convexe si pour toute famille finie de point pondérés $(A_i, \lambda_i)_{i \in I}$ avec $A_i \in \mathcal{C}$ et $\lambda_i \geqslant 0$ non tous nuls, le barycentre de la famille

est dans $\mathcal{C}$. Montrer que si $\mathcal{C}$ est convexe alors il y a au plus un point $B'' \in \mathcal{C}$ qui minimise la distance AB''.

Exercice 4

1. Montrer que l'addition fait de $\mathbb{C}$ un espace affine de direction $\mathbb{C}$.
2. On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ du produit scalaire $(x, y) \mapsto \operatorname{Re}(\overline{x}y)$. L'espace affine $\mathbb{C}$ est ainsi muni d'une structure euclidienne. Soit $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien, de direction E, soit $O \in \mathcal{E}$ et soit (e_0, e_1) une base orthonormée de E. Montrer que l'application
$$\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ x+iy & \longmapsto & O + xe_0 + ye_1 \end{cases}$$
est une isométrie affine bijective.
3. Soit f une isométrie de $\mathcal{E}$. Montrer qu'il existe des nombres $a, b \in \mathbb{C}$ (dépendant de f) tels que $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$ soit de la forme $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\overline{z} + b$. Montrer que $|a| = 1$.
4. Retrouver la classification des isométries affines en dimension 2 en distinguant les cas selon les valeurs de a et b.