



## Exercice 1

Quelles sont les hypothèses qui sont des isométries ?

## Exercice 2

Soit  $ABC$  un triangle. On note  $s_A, s_B, s_C$  les symétries centrales par rapport à  $A, B, C$  respectivement. Décrire l'isométrie  $s_A \circ s_B \circ s_C$ .

## Exercice 3

Soient  $r_a$  et  $r_b$  deux rotations non triviales d'angle  $\theta_a$  et  $\theta_b$ . Montrer que  $r_a \circ r_b = r_b \circ r_a$  si et seulement si  $r_a$  et  $r_b$  ont même centre.

## Exercice 4

Soient  $t$  la translation de vecteur  $\vec{u}$  et  $\sigma$  la réflexion par rapport à la droite  $D$ . A quelle condition a-t-on  $\sigma \circ t = t \circ \sigma$  ?

## Exercice 5

Soit  $ABC$  un triangle de périmètre 1.

1. Montrer qu'il existe un point  $C'$  tel que  $ABC'$  est isocèle en  $C'$ , l'aire de  $ABC'$  est égale à l'aire de  $ABC$  et le périmètre de  $ABC'$  est plus petit que celui de  $ABC$ .

2. En déduire l'existence d'un triangle isocèle de base  $[AB]$  de même périmètre que  $ABC$  mais d'aire plus grande.

3. En déduire que parmi les triangles de périmètre 1, celui d'aire maximale est le triangle équilatéral.

## Exercice 6

• Montrer que le produit de deux symétries centrales est une translation.

• Déterminer le vecteur de translation.

• Montrer que le produit de deux rotations d'angle  $\frac{\pi}{2}$  est une symétrie centrale.

• Déterminer le centre de cette symétrie centrale.

1/3

TSVP →

## Exercice 7

Soient  $d, d'$  deux droites du plan. On note  $\sigma_d, \sigma_{d'}$  les réflexions par rapport aux droites  $d$  et  $d'$ .

- Montrer que si  $d \parallel d'$  alors  $\sigma_{d'} \circ \sigma_d$  est une translation de vecteur  $\vec{u}$  à déterminer.
- On rappelle que si  $d \cap d' = \{\Omega\}$  alors  $\sigma_{d'} \circ \sigma_d$  est une rotation de centre  $\Omega$ . Calculer l'angle de cette rotation à l'aide de l'angle orienté  $(d, d')$ .

## Exercice 8

Montrer que toute rotation et toute translation est le produit de plusieurs couples de réflexions.

## Exercice 9

Soient  $r_1, r_2$  deux rotations d'angles  $\theta_1, \theta_2$  respectivement. Montrer que :

- Si  $\theta_1 + \theta_2 = 0$  [ $2\pi$ ] alors  $r_2 \circ r_1$  est une translation.
- Si  $\theta_1 + \theta_2 \neq 0$  [ $2\pi$ ] alors  $r_2 \circ r_1$  est une rotation.

## Exercice 10

Soit  $ABC$  un triangle isocèle rectangle en  $A$  tel que  $(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{\pi}{2}$ . On note  $I, J, K$  les milieux respectifs de  $[BC], [CA], [AB]$ . On note  $r$  la rotation de centre  $I$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ , et  $t$  la translation de vecteur  $\frac{1}{2}\overline{BC}$ . On pose  $f = r \circ t$  et  $g = t \circ r$ .

1. Montrer que  $AKIJ$  est un carré.

2. Quelle est la nature de  $f$  et  $g$  ? Quels éléments caractéristiques ?

3. Quelle est la nature de  $g \circ f^{-1}$  ? ses éléments caractéristiques ?

## Exercice 11

Soient  $B, C$  deux points distincts. On note  $I$  le milieu de  $[BC]$ . On note  $r_B$  la rotation de centre  $B$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ ,  $R_C$  la rotation de centre  $C$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ ,  $t$  la translation de vecteur  $\overline{BC}$ . On note  $s$  la composée  $r_C \circ t \circ r_B$ .

1. Quelle est la nature de  $s$  ?

2. Quelle est l'image de  $B$  par  $s$  ?

3. Quelles sont les caractéristiques de  $s$  ?

## Exercice 12

1. Montrer que l'image d'un cercle par une isométrie est un cercle de même rayon.

2. Soient  $C$  et  $C'$  deux cercles de même rayon. Déterminer toutes les isométries qui transforment  $C$  en  $C'$ .

2/3

TSVP →

### Exercice 13

---

Soient  $D$  et  $D'$  deux droites données. On note  $E$  la réunion de  $D$  et  $D'$ . Trouver l'ensemble des déplacements qui préservent  $E$  lorsque :

1.  $D$  et  $D'$  sont perpendiculaires.
2.  $D$  et  $D'$  sont sécantes et non perpendiculaires.
3.  $D$  et  $D'$  sont distinctes et parallèles.

### Exercice 14

---

Soient  $A$  et  $B$  deux points distincts. On note  $r_A$  et  $r_B$  les rotations de centre  $A$  et  $B$ , et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ . Si  $M$  est un point du plan, on note  $M_1 = r_A(M)$  et  $M_2 = r_B(M)$ . Soit  $f$  la transformation  $r_B \circ r_A^{-1}$ .

1. Construire  $C = f(A)$ .
2. Quelle est la nature de  $f$  ?
3. Quelles sont les éléments caractéristiques de  $f$  ?
4. Quelle est la nature du quadrilatère  $M_1M_2CA$  ?
5. On suppose que le point  $M$  décrit le cercle  $\Gamma$  de diamètre  $[AB]$ . Quel est le lieu géométrique du point  $M_2$  lorsque  $M$  parcourt  $\Gamma$  ?
6. Déterminer le lieu géométrique de  $I$  le milieu de  $[M_1M_2]$  lorsque  $M$  parcourt  $\Gamma$ .

### Exercice 15

---

Soit  $ABC$  un triangle dont tous les angles sont aigus. Soient  $M, N, P$  trois points sur chacun des côtés de  $ABC$ . On va trouver le triangle  $MNP$  inscrit à  $ABC$  de périmètre minimal (Problème de Fagnano).

1. On fixe un point  $P$  sur  $[AB]$ , trouver  $M \in [BC]$  et  $N \in [CA]$  tel que  $MNP$  est de périmètre minimal. On montrera en même temps que ces points sont uniques.
2. Exprimer le périmètre du triangle  $MNP$  trouvé à la question précédente en fonction de  $CP$  et des angles du triangle  $ABC$ .
3. On laisse à présent  $P$  varier. Trouver pour quel point  $P \in [BC]$ , le périmètre de  $MNP$  est minimal.