UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie en petite dimension

Interrogation 1

Durée de l'interrogation : 1h
Sauf mention explicite du contraire, toutes les réponses doivent être accompagnées d'une démonstrations. La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans la note.

Exercice 1 : Questions de cours

1. Donner la définition du barycentre.
2. Montrer que les médianes d'un triangle sont concourantes (c'est-à-dire qu'elles s'intersectent en un point commun aux trois droites).

Exercice 2

Considérons les points suivants du plan :

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

1. Si $t \in \mathbb{R}$, quelles sont les coordonnées du point $P = B + t\overrightarrow{BC}$?
2. Donner une équation cartésienne pour chacune des droites (BC) et (DE).
3. Pour quel(s) réel(s) u le point $Q = D + u\overrightarrow{DE}$ est-il l'intersection des droites (AP) et (DE) ? (Les valeurs de t pour lesquelles il n'existe pas de tel réel u, s'il y en a, devront être précisées.)
4. Quel est l'ensemble des points d'intersection de (AP) et (DE) quand le point P parcourt (BC) ?

Exercice 3

Compléter la démonstration suivante en cochant pour chaque emplacement la case correspondant au texte à compléter. Pour cet exercice, aucune démonstration n'est demandée, mais les réponses fausses pourront être notées négativement.

Soit ABC un triangle, et soient $P \in (BC)$, $Q \in (CA)$ et $R \in (AB)$ trois points distincts de A, B, C.

Comme les vecteurs $\overrightarrow{BP}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$, il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{BP} = \lambda\overrightarrow{BC}$. De même, il existe des réels μ et ν tels que $\overrightarrow{CQ} = \mu\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{AR} = \nu\overrightarrow{AB}$.

Le point P est alors le barycentre des points pondérés $\boxed{3}$, et on peut exprimer de même Q comme barycentre de C et A, et R comme barycentre de A et B.

Supposons que

$$\lambda\mu\nu = (1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu) \qquad \text{et} \qquad (1-\lambda)\mu \neq 1.$$

Notons O le barycentre de $(A, \lambda\mu)$, $(B, (1-\lambda)(1-\mu))$ et $\boxed{4}$. Comme $(1-\lambda)\mu \neq 1$, ce barycentre est bien défini. De plus, $\boxed{5}$, on a

$$\begin{aligned} O &= \mathrm{Bary}\left((A, \lambda\mu), (P, 1-\mu)\right) \\ O &= \mathrm{Bary}\left((B, (1-\lambda)(1-\mu)), (Q, \lambda)\right), \end{aligned}$$

donc le point O est commun aux deux droites (AP) et (BQ). Comme on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Bary}((A, \lambda\mu)&,(B, (1-\lambda)(1-\mu))) \\ &= \mathrm{Bary}\left((A, \lambda\mu(1-\nu)), (B, (1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu))\right) \quad \text{car } \nu \neq 1 \\ &= \mathrm{Bary}\left((A, \lambda\mu(1-\nu)), (B, \lambda\mu\nu)\right) \quad \lambda\mu\nu = (1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu) \\ &= \mathrm{Bary}\left((A, 1-\nu), (B, \nu)\right) \quad \text{car } \lambda, \mu \neq 0 \\ &= R, \end{aligned}$$

on a également

$$O = \mathrm{Bary}\left((C, \lambda(1-\mu)), (R, \lambda\mu + (1-\lambda)(1-\mu))\right)$$

donc le point O est aussi $\boxed{6}$.

On a donc montré que $\boxed{7}$ $\lambda\mu\nu = (1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu)$ et $(1-\lambda)\mu \neq 1$ $\boxed{8}$ les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes.

$\boxed{1}$
- ☐ colinéaires
- ☐ opposés
- ☐ alignés

$\boxed{2}$
- ☐ $C \neq P$
- ☐ $B \neq C$
- ☐ $B \neq P$

$\boxed{3}$
- ☐ (B, λ) et (C, λ)
- ☐ (B, λ) et $(C, 1-\lambda)$
- ☐ $(B, 1-\lambda)$ et (C, λ)

$\boxed{4}$
- ☐ $(C, (1-\lambda)\mu)$
- ☐ $(C, 1)$
- ☐ $(C, \lambda(1-\mu))$

$\boxed{5}$
- ☐ par associativité du barycentre
- ☐ puisque (AP) et (BQ) s'intersectent en un point
- ☐ comme la somme des coefficients est non nulle

$\boxed{6}$
- ☐ le centre de gravité du triangle ABC
- ☐ un barycentre
- ☐ sur la droite (CR)

$\boxed{7}$
- ☐ si
- ☐ l'on a
- ☐ parce que

$\boxed{8}$
- ☐ car
- ☐ alors
- ☐ si et seulement si