UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie en petite dimension

Examen Terminal : 17 décembre 2015

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits. Toutes les réponses doivent être accompagnées d'une démonstration. Les réponses non démontrées, ou dont la démonstration est fausse, pourront n'apporter aucun point. Le manque de clarté des démonstrations sera aussi pénalisé.

Durée : Deux heures

Il n'est pas nécessaire de répondre à toutes les questions pour avoir la note maximale. Enfin, il n'y a aucune obligation de suivre les indications proposées pour répondre correctement aux questions.

Questions de cours

1. Énoncer et démontrer le théorème d'Al-Kashi.
2. Soit f une bijection du plan. Écrire avec des quantificateurs les phrases :

   « f conserve les droites. » « f conserve le parallélisme. »

3. Rappeler la définition d'une homothétie. *On ne demande pas d'énoncer des propriétés des homothéties, ni de démontrer ces propriétés, simplement de définir ce qu'est une homothétie*
4. Démontrer que la somme des angles d'un triangle est égale à π.
5. Quelle est la nature de la composée $f = t \circ r$ d'une translation t et d'une rotation r d'angle π ? Si on note $\overrightarrow{u}$ le vecteur de translation de t et A le centre de r, donner les caractéristiques géométriques de f à l'aide de celles de t et r. *On pourra calculer l'image de A par f.*

Exercice 1

Soient A, B, C trois points du plan. Soit M un point quelconque et k un réel différent de -2, on définit une fonction $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ du plan dans lui-même de la façon suivante : $f(M) = \text{Bary}\{(M, 1,), (A, k), (B, 1)\}$.

1. Montrer que si $k = -1$ alors f est une translation.

2. Déterminer le vecteur de translation de f dans ce cas.
3. Montrer que si $k \neq -1$ alors f est une homothétie.
4. Déterminer le centre et le rapport de cette homothétie.

Exercice 2

Soit $(ABCD)$ un trapèze du plan, c'est à dire un quadrilatère tel que $(AB) /\!/ (CD)$. On note I le milieu de $[AB]$, J celui de $[CD]$, on note O l'intersection des diagonales (AC) et (BD) du trapèze.

1. Faire une figure que l'on complètera tout au long de l'exercice.
2. Montrer qu'il existe une unique homothétie h de centre O qui vérifie $h(A) = C$.
3. Montrer que $h(B) = D$.
4. Montrer que $h(I) = J$.
5. En déduire que O, I, J sont alignés.
6. On suppose à présent que $(ABCD)$ n'est pas un parallélogramme. On note O' l'intersection des droites (AD) et (BC). Montrer que O', I, J sont alignés.
   Indication : On pourra introduire (sans démontrer son existence et unicité) l'homothétie g de centre O' qui vérifie $g(B) = C$.
7. En déduire qu'il existe une droite passant par O', I, O, J.

Exercice 3

Soit (ABC) un triangle équilatéral. Soit r la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Si M est un point du plan, on notera $M' = r(M)$. Soit σ la réflexion par rapport à la droite $(A'B')$. On notera $M'' = \sigma \circ r(M)$ pour M un point du plan. Soit G le centre de gravité du triangle (ABC).

1. Faire une figure que l'on complètera tout au long de l'exercice.
2. Montrer que $(A'B'C')$ est un triangle équilatéral.
3. Montrer que $(A''B''C'')$ est l'image du triangle (ABC) par une translation t d'un vecteur que l'on précisera.
4. Justifier que G' et G'' sont les centres de gravité respectifs des triangles $(A'B'C')$ et $(A''B''C'')$.
5. Montrer que le triangle $(GG'G'')$ est isocèle.
6. On suppose que l'aire de (ABC) est 1. Quelle est alors l'aire de $(GG'G'')$?
   Indication : On pourra commencer par montrer que dans un triangle équilatéral, le centre de gravité est situé au 2/3 de chaque hauteur.