Feuille n°5 :
Arithmétique des entiers

Exercice 1

Effectuer, sans utiliser la calculatrice, les divisions euclidiennes suivantes :

1. 100 001 par 101,

2. 656 565 par 11,

3. 66 227 par 13.

Exercice 2

Connaissant le reste de la division euclidienne d'un entier par 10, pouvez-vous en déduire celui de la division euclidienne de cet entier par 5 ? par 6 ?

Exercice 3

Sachant que $12\,079\,233 = 75\,968 \times 159 + 321$, déterminer le reste de la division euclidienne de 12 079 233 par 75 968, puis par 159.

Exercice 4

1. Effectuer la division euclidienne de 903 par 37.

2. Quel est le plus petit entier positif qu'il faut ajouter à 903 pour que le quotient de la division euclidienne augmente de 1 ?

3. Quel est le plus petit entier positif qu'il faut enlever à 903 pour que le quotient de la division euclidienne diminue de 1 ?

Exercice 5

On range 461 pots de yaourts dans des caisses (toutes identiques), en remplissant entièrement une caisse avant de passer à la suivante. On utilise 14 caisses ; combien chaque caisse contient-elle de pots ? (d'après D. Perrin ; plusieurs solutions sont possibles ; on tâchera de les donner toutes)

Exercice 6

Soit n un entier. Calculer le reste de la division euclidienne de n^2 par 4, suivant que n est pair ou impair. Existe-t-il des entiers a et b tels que $a^2 + b^2 = 8\,123$?

Exercice 7

Connaissant la division euclidienne de deux entiers n et n' par un entier $b \geq 1$ (c'est-à-dire quotients et restes), donner un moyen simple de déterminer la division euclidienne de $n + n'$ par b.

Exercice 8

Soit n un entier. Montrer que, si l'entier m divise les entiers $8n + 7$ et $6n + 5$, alors $m = \pm 1$

Exercice 9

Montrer qu'un entier est divisible par 7 si et seulement si la différence entre le nombre de ses dizaines et le double de son chiffre des unités est divisible par 7. L'entier 398 754 321 est-il divisible par 7 ?

Exercice 10

Par combien de zéros se termine l'écriture décimale de 126! (factorielle 126) ?

Exercice 11

Peut-on mettre les nombres entiers de 1 à 30 dans les cases d'un tableau de 5 lignes et 6 colonnes de telle façon qu'en additionnant pour chaque colonne les nombres qui s'y trouvent, on obtienne des sommes égales ?

Exercice 12

Quel est le reste de la division euclidienne par 7 de 247^{349} ?

Exercice 13

On remarque que $7 \equiv -1 \pmod 8$. Soit n un entier positif. Démontrer que si n est impair alors le nombre $7^n + 1$ est divisible par 8 ; dans le cas où n est pair, donner le reste de la division euclidienne de $7^n + 1$ par 8.

Exercice 14

1. Calculer toutes les puissances de 3 modulo 7, c'est-à-dire $3^0 \pmod 7$, $3^1 \pmod 7$, $3^2 \pmod 7$, $\ldots$

2. Calculer toutes les puissances de 38 modulo 7.

Exercice 15

1. Déterminer le chiffre des unités et celui des dizaines de $123\,456^{789}$.
2. Trouver les trois derniers chiffres de $7^{9\,999}$.

Exercice 16

Soit a, b et n des entiers positifs. Si $a \equiv b \mod n$, a-t-on nécessairement $a^a \equiv b^b \mod n$?

Exercice 17

1. Montrer que le reste de la division euclidienne par 8 du carré de tout entier impair est 1.
2. Montrer, de même, que tout entier pair x vérifie $x^2 \equiv 0 \pmod 8$ ou $x^2 \equiv 4 \pmod 8$.
3. Soit x un entier. Quelles sont les valeurs possibles de $2x^2 \pmod 8$?
4. Soient a, b, c trois entiers impairs. Déterminer le reste modulo 8 de $a^2 + b^2 + c^2$ et celui de $2(ab + bc + ca)$.
5. En déduire que ces deux derniers entiers ne sont pas des carrés, puis que $ab + bc + ca$ non plus.

Exercice 18

1. Écrire la liste des nombres premiers inférieurs à 100.
2. 161 est-il premier ?
3. On appelle nombres premiers jumeaux, deux nombres premiers qui comme 11 et 13, diffèrent de 2. À l'aide du crible d'Ératosthène, déterminer deux nombres premiers jumeaux, compris entre 200 et 250.

Exercice 19

Les nombres $111, 1111, 11\,111, 111\,111$ sont-ils premiers ?

Exercice 20

1. Décomposer en facteurs premiers les entiers $a = 46\,848$, $b = 2\,379$, $c = 8\,633$, $d = 4\,183$.
2. Décomposer $2\,873$ et $1\,001$ en facteurs premiers.

Exercice 21

Soit $n = 792$. Trouver le plus petit entier naturel m tel que nm soit le carré d'un entier.

Exercice 22

Montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini. *On pourra raisonner par l'absurde : supposer que l'ensemble des nombres premiers est fini et considérer le produit de tous les nombres premiers plus* 1.

Exercice 23

Soit p un nombre premier différent de 2 et de 5. Montrer que p divise une infinité d'entiers dont tous les chiffres sont des 1 : 1, 11, 111, 1 111, ...

Exercice 24

Soit k un entier naturel non nul. Montrer que, si $2^k + 1$ est un nombre premier, alors k est une puissance de 2.

Exercice 25

Le numéro I.N.S.E.E d'un individu est une liste de 15 chiffres. Le nombre A constitué par les 13 premiers chiffres est défini par l'identité de la personne. Les deux derniers forment une clé K calculée de la manière suivante : si r est le reste de la division euclidienne de A par 97 on pose $K = 97 - r$. De cette façon, dans un numéro INSEE, on a toujours $A + K \equiv 0 \pmod{97}$.

1. Vérifiez la clef de votre $N°$ I.N.S.E.E ou, si vous préférez, calculez la clef associée aux 13 chiffres suivants :

   2 96 06 29 278 119

2. En recopiant votre numéro INSEE sur un imprimé administratif, vous avez fait une erreur : l'un des chiffres est erroné alors que les autres sont bons. Comment l'administration pourra-t-elle s'apercevoir qu'il y a une erreur ?
3. Et si deux chiffres consécutifs distincts sont permutés, l'administration pourra-t-elle encore détecter qu'il y a une erreur ?
4. Donner un exemple d'erreur que l'administration ne pourra pas détecter.

Exercice 26

Un apprenti chocolatier veut réaliser une tablette de chocolat quadrillée en 600 petits carrés identiques. La tablette doit être partagée selon les lignes de son quadrillage en grands morceaux carrés tous identiques. Quelle taille maximale pourra avoir un tel morceau carré ?

Exercice 27

Soit n un entier positif. Montrer que $2n+3$ et n^2+3n+2 sont premiers entre eux.

Exercice 28

Démontrer que, pour tout entier naturel n, la fraction $\dfrac{5^{n+1}+6^{n+1}}{5^n+6^n}$ est irréductible.

Exercice 29

1. Soit a et b deux entiers premiers entre eux. Montrer que a et $a+b$ sont premiers entre eux.
2. Soit a, b et c trois entiers. Montrer que si a est premier avec b et c, il est premier avec leur produit bc.
3. Soit a et b deux entiers premiers entre eux. Montrer que pour tout $(k,l) \in \mathbf{N}^2$, a^k et b^l sont premiers entre eux.

Exercice 30

Démontrer que, si a et b sont des entiers premiers entre eux, il en est de même des entiers $a+b$ et ab. (On pourra raisonner par l'absurde en supposant l'existence d'un diviseur *premier* commun à $a+b$ et ab.)

Exercice 31

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, calculer le pgcd de 231 868 et 8 190. En déduire leur ppcm.
2. Même question avec les entiers 23 145 et 117.
3. Même question avec 12 345 et 678.

Exercice 32

1. Prouver que 23 et 35 sont premiers entre eux. En utilisant l'algorithme d'Euclide, trouver deux entiers relatifs u et v tels que $23u+35v=1$.
2. Même question avec 27 et 25.

Exercice 33

1. Déterminez le pgcd de 2 873 et 1 001, ainsi que deux entiers relatifs u et v tels que $2\,873\,u+1\,001\,v=\text{pgcd}(2\,873,1\,001)$.
2. Existe-t-il des entiers relatifs u et v vérifiant $2\,873\,u+1\,001\,v=15$?

Exercice 34

Déterminer les couples d'entiers naturels de pgcd 18 et de somme 360. De même avec pgcd 18 et produit 6 480.

Exercice 35

1. Résoudre dans $\mathbf{Z}$, l'équation $6a+11b=1$.
2. Trouver une solution dans $\mathbf{Z}$ de l'équation $6a+11b=6$, puis résoudre dans $\mathbf{Z}$, l'équation $6a+11b=6$.
3. Résoudre dans $\mathbf{Z}$, l'équation $6a+12b=5$.

Exercice 36

On se propose d'abord de résoudre dans $\mathbf{Z}$ l'équation $35x-26y=4$.

1. Prouver que 35 et 26 sont premiers entre eux.
2. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière (x_0,y_0), puis toutes les solutions à l'équation.

On se propose d'appliquer l'équation précédente à de la cryptographie. On assimile les lettres de l'alphabet $A,B,\cdots,Z$ aux nombres 0,1, $\cdots$, 25. Ensuite, à chaque entier i dans $\{0,1,\cdots,25\}$, on associe $f(i)$ le reste de la division euclidienne de $35i$ par 26. Par exemple, à la lettre B assimilée au nombre 1 on associe $f(1)=9$ et 9 est assimilée à la lettre J. Ainsi, la lettre B sera codée J.

3. Coder le mot "BRETAGNE".
4. En utilisant, l'équation ci-dessus, décoder le mot "EKX".

Exercice 37

On définit une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par $f(n)=\text{pgcd}(42,n)$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer $f(0)$, $f(2)$, $f(10)$ et $f(5)$. L'application f est-elle injective ?
2. L'application f est-elle surjective ? Déterminer $f(\mathbb{N})$.

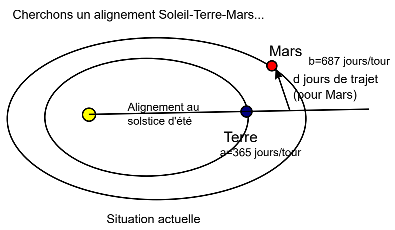
3. Déterminer $f^{-1}(\{18\})$ et $f^{-1}(\{6, 15\})$.
4. Trouver tous les couples d'entiers relatifs (u, v) tels que $42u + 5v = f(5)$.
5. Trouver tous les couples d'entiers relatifs (u, v) tels que $42u + 7v = 3$.

Exercice 38

En fin de marché, un commerçant a soldé ses caisses de légumes : la caisse de courgettes à 26 euros, celles de tomates à 17 euros et celles de pommes de terre à 13 euros. Il a touché en tout 613 euros. Pour pouvoir payer les producteurs, il a besoin de savoir combien de caisses de chaque légume il a vendu, mais il ne se souvient plus que du nombre total de caisses : 28. Pouvez-vous l'aider ?

Exercice 39

Aidez cet astronome amateur. Aujourd'hui, c'est le solstice d'été pour la Terre. J'ai observé qu'il y a 46 jours, Mars était également à son solstice d'été. Je sais que la Terre met 365 jours pour tourner autour du soleil, alors que Mars en met 687. J'ai l'impression d'avoir assez d'éléments pour prédire la prochaine fois que Mars et la Terre connaîtront leurs solstices d'été simultanément, mais quelle équation devrais-je savoir résoudre ?



Exercice 40

1. Décomposer 51 et 216 en facteurs premiers ; calculer $\mathrm{pgcd}(51, 216)$. Déterminer toutes les expressions de 216 comme le produit de deux entiers naturels premiers entre eux.
2. Soit a et b des entiers strictement positifs tels que $a + b = 51$, $a < b$ et $\mathrm{ppcm}(a, b) = 216$. Montrer que $d = \mathrm{pgcd}(a, b)$ divise $\mathrm{pgcd}(51, 216)$.
3. Montrer que $a' = a/d$ et $b' = b/d$ sont premiers entre eux. Que vaut $\mathrm{ppcm}(a', b')$? En déduire la liste des couples (a, b) possibles.

Numération

Exercice 41

Écrire en base 7 les nombres suivants :
$A = 7^4 + 3 \times 7^3 + 2 \times 7^2 + 6 \times 7 + 5$, $B = 7^5 + 3 \times 7^3 + 2 \times 7^2 + 8$, $C = 7^4 + 7^3 \times 7 + 3 \times 7$.

Exercice 42

1. Écrire en base 7, puis en base 2, enfin dans la base hexadécimale, le nombre mille sept-cent quatre-vingt-neuf.
2. Que vaut le nombre écrit $\overline{101001001}$ en base 2 ?
3. Que vaut le nombre écrit $\overline{BAC}$ en hexadécimal ?

Exercice 43

1. Écrire $1\,234$ en base 5.
2. Écrire $\overline{1\,234}^{(5)}$ en base 10.

Exercice 44

Dans une certaine base, un entier s'écrit $\overline{1\,254}$ et son double $\overline{2\,541}$. Quel est cet entier et quelle est la base ?

Exercice 45

1. Calculer $\overline{4023}^{(5)} \times \overline{12}^{(5)}$.
2. Calculer $\overline{2345}^{(6)} \times \overline{52}^{(6)}$.

Exercice 46

1. Dans quelle base b a-t-on l'égalité $\overline{32}^b \times \overline{14}^b = \overline{438}^b$?
2. Même question avec l'équation $\overline{165}^b \times \overline{21}^b = \overline{4125}^b$.
3. Écrire le nombre $\overline{1\,010}^5$ en base 2.

Exercice 47

Ce nombre s'écrit avec huit chiffres en base 2 et avec six chiffres en base 3. Quel est-il ? Ah, oui, j'oubliais, c'est un nombre premier.