UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie en petite dimension

Corrigé du contrôle continu 2

Exercice 1

Énoncer *précisément* (tout énoncé inexact ou incomplet sera compté comme faux) les trois cas d'égalité des triangles. Toutes les hypothèses des énoncés devront être écrites. Il n'est pas demandé de les démontrer.

Voir le cours.

Exercice 2

Définir *précisément* (tout énoncé inexact ou incomplet sera compté comme faux) ce qu'est une homothétie (dans un plan euclidien).

Voir le cours.

Exercice 3

Soit E un plan euclidien orienté. Soit ABC un triangle équilatéral tel que $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = \pi/3$. Soit M un point de son cercle circonscrit tel que M est sur l'arc entre B et C ne contenant pas A. Le but de l'exercice est de montrer que $MA = MB + MC$.

Question 1

On considère le point N de (BM) tel que N est sur la demi-droite issue de M ne contenant pas B, et tel que $MN = MC$. Montrer que $\mathrm{Mes}\,\widehat{CMN} = \frac{\pi}{3}$. On pourra admettre que l'angle $\widehat{CMB}$ est obtus.

Notons $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC et O son centre.
Les points N, M et B étant alignés, on a $\mathrm{Mes}\,\widehat{CMN} = \pi - \mathrm{Mes}\,\widehat{BMC}$. De plus par le théorème de l'angle inscrit, les angles de droites $\widehat{(MB),(MC)}$ et $\widehat{(AB),(AC)}$ ont même mesure $\pi/3$ modulo π. Comme l'angle géométrique $\widehat{CMB}$ a donc pour mesure $\pi/3$ soit $|\pi/3 - \pi| = 2\pi/3$. Comme il est obtus, sa mesure est $2\pi/3$ et celle de son supplémentaire $\widehat{CMN}$ est donc $\pi/3$.

Question 2

En déduire la nature du triangle CMN.

Le triangle CMN a un angle de mesure $\pi/3$ et les deux côtés qui le composent de même longueur. Par la formule d'Al-Kashi,

$$CN^2 = MN^2 + MC^2 - 2MN \times MC \cos \pi/3 = MN^2.$$

C'est donc un triangle équilatéral.

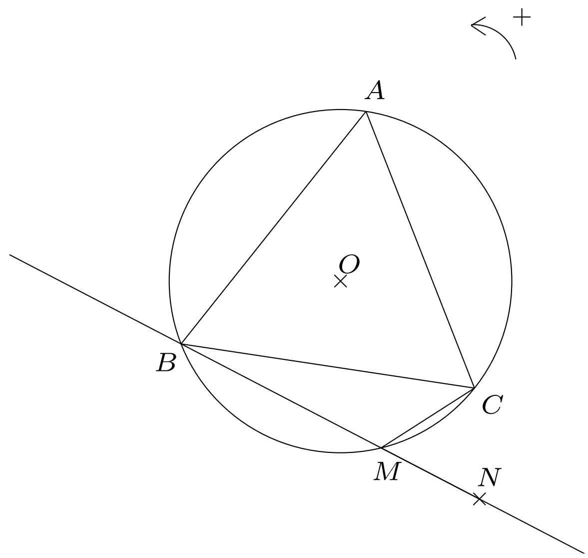
Question 3

On admettra que $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MC}}) = +\pi/3$. En considérant une isométrie bien choisie, montrer que $MA = MB + MC$.

Soit r la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

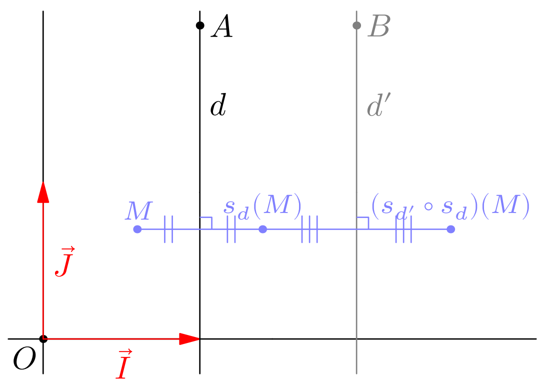
Comme $CA = CB$ et $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = \pi/3$, on a $r(A) = B$. De même, comme $CM = CN$ et $\mathrm{Mes}(\widehat{\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CN}}) = +\pi/3$ on a $r(M) = N$. Puisque r est une isométrie, on conclut donc que $MA = NB$. De plus, $NB = NM + MB = MC + MB$. Donc finalement :

$$MA = MB + MC.$$



Exercice 4

Soit $(O, \vec{I}, \vec{J})$ un repère orthonormé direct du plan euclidien E. Soit d la droite passant par le point $A(1, 2)$ et de vecteur directeur $\vec{J}$.



Question 1

Déterminer la nature (Est-ce une isométrie ? Est-elle directe ? Quelle est sa place dans la liste des isométries du plan ?) et les éléments caractéristiques (angles, axe, centre, ou vecteur...) de $t_{2\vec{I}} \circ s_d$, composée de la symétrie axiale s_d d'axe d suivie de la translation $t_{2\vec{I}}$ de vecteur $2\vec{I}$.

On décompose la translation $t_{2\vec{I}}$ comme composée de la symétrie d'axe d suivie de la symétrie d'axe d', où d' est l'image de la droite d par la translation de vecteur $\vec{I}$, c'est à dire la droite passant par le point $B(2,2)$ et de vecteur directeur $\vec{J}$

$$t_{2\vec{I}} = s_{d'} \circ s_d.$$

Ce choix assure la simplification suivante

$$t_{2\vec{I}} \circ s_d = s_{d'} \circ s_d \circ s_d = s_{d'}.$$

Question 2

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $t_{2\vec{I}+3\vec{J}} \circ s_d$, composée de la symétrie axiale s_d d'axe d suivie de la translation $t_{2\vec{I}+3\vec{J}}$ de vecteur $2\vec{I}+3\vec{J}$.

On décompose $t_{2\vec{I}+3\vec{J}} = t_{3\vec{J}} \circ t_{2\vec{I}}$. Alors

$$t_{2\vec{I}+3\vec{J}} \circ s_d = t_{3\vec{J}} \circ t_{2\vec{I}} \circ s_d = t_{3\vec{J}} \circ s_{d'}$$

par la question précédente.

On trouve donc que la composée de la symétrie axiale s_d suivie de la translation $t_{2\vec{I}+3\vec{J}}$ est la symétrie glissée d'axe d' et de vecteur $3\vec{J}$.

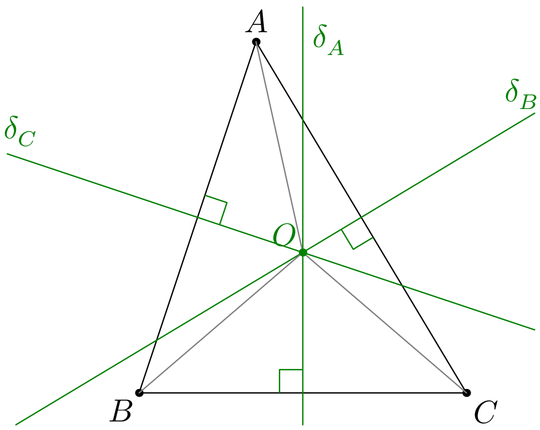
Exercice 5

Soit ABC un triangle non plat dans le plan $\mathcal{P}$.

Question 1

Montrer que les médiatrices des côtés du triangle ABC sont concourantes. (On montrera en particulier qu'elles ne sont pas parallèles.)

On note δ_A la médiatrice du segment $[BC]$, δ_B celle de $[CA]$ et δ_C celle de $[AB]$.



Si $\delta_A \mathbin{/\!/} \delta_B$, comme $\delta_A \perp (BC)$, on a $\delta_B \perp (BC)$, or $\delta_B \perp (CA)$, donc $(BC) \mathbin{/\!/} (CA)$, or le point C est commun à (BC) et (CA), donc les droites (BC) et (CA) seraient confondues, donc A, B et C seraient alignés, donc le triangle ABC serait plat.

Par contraposition, comme le triangle ABC n'est pas plat, les droites δ_A et δ_B sont sécantes.

De même, on montre que les droites δ_B et δ_C sont sécantes et que les droites δ_C et δ_A sont sécantes.

Soit O le point d'intersection des droites δ_A et δ_B. Comme δ_A est la médiatrice du segment $[BC]$, on a $OB = OC$. Comme δ_B est la médiatrice du segment $[CA]$, on a aussi $OC = OA$. On a donc $OA = OB$, donc O appartient aussi à la médiatrice δ_C du segment $[AB]$.

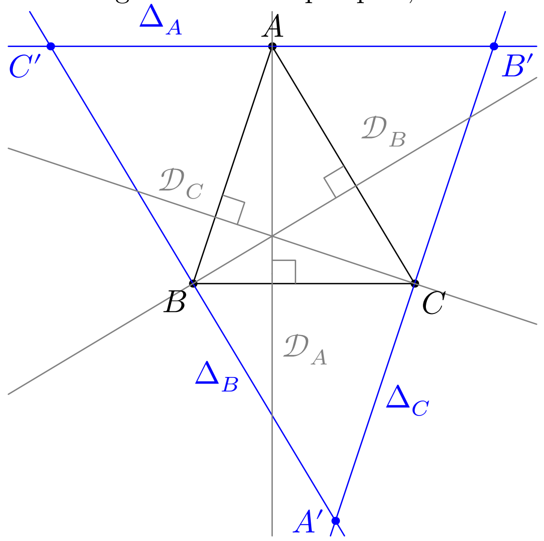
Donc les médiatrices δ_A, δ_B et δ_C sont concourantes (en O).

Question 2

On note Δ_A la droite parallèle à (BC) passant par A, Δ_B la parallèle à (CA) passant par B, et Δ_C la parallèle à (AB) passant par C. Montrer que les droites Δ_A et Δ_B sont sécantes.

Si $\Delta_A \mathbin{/\!/} \Delta_B$, comme $\Delta_A \mathbin{/\!/} (BC)$ et $\Delta_B \mathbin{/\!/} (CA)$, on aurait $(BC) \mathbin{/\!/} (CA)$ (par transitivité du parallélisme), donc les points A, B et C seraient alignés, donc le triangle ABC serait plat.

Par contraposition, comme le triangle ABC n'est pas plat, les droites Δ_A et Δ_B sont sécantes.



Question 3

On note A' le point d'intersection des droites Δ_B et Δ_C, B' le point d'intersection de Δ_C et Δ_A, C' celui de Δ_A et Δ_B. Montrer que le quadrilatère $AC'BC$ est un parallélogramme.

On a $\Delta_A \mathbin{/\!/} (BC)$ et $\Delta_B \mathbin{/\!/} (CA)$, c'est-à-dire $(AC') \mathbin{/\!/} (BC)$ et $(BC') \mathbin{/\!/} (CA)$, donc les côtés opposés du quadrilatère $AC'BC$ sont parallèles, donc c'est un parallélogramme.

Question 4

Montrer que $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} = \vec{0}$.

Comme le quadrilatère $AC'BC$ est un parallélogramme, on a $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{CB}$.

Comme $\Delta_A \mathbin{/\!/} (BC)$ et $\Delta_C \mathbin{/\!/} (AB)$, on montre comme à la question précédente que le quadrilatère $ABCB'$ est un parallélogramme. On a donc $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BC}$, donc

$$\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}.$$

Le point A est donc le milieu du segment $[B'C']$.

Question 5

On note $\mathcal{D}_A$ la hauteur issue de A dans le triangle ABC. Montrer que $\mathcal{D}_A$ est la médiatrice du segment $[B'C']$.

Comme $\Delta_A \mathbin{/\!/} (BC)$ et $(B'C') = \Delta_A$, on a $(BC) \mathbin{/\!/} (B'C')$, donc la droite $\mathcal{D}_A$ est perpendiculaire à $(B'C')$, et elle passe par A. Or on a montré que A est le milieu du segment $[B'C']$, donc $\mathcal{D}_A$ est la médiatrice de $[B'C']$.

Question 6

Montrer que les hauteurs du triangle ABC sont concourantes.

D'après la question précédente, la hauteur $\mathcal{D}_A$ est aussi la médiatrice du segment $[B'C']$. On montre de même que $\mathcal{D}_B$ est la médiatrice de $[C'A']$ et que $\mathcal{D}_C$ est la médiatrice de $[A'B']$.

Comme les médiatrices du triangle du triangle $A'B'C'$ sont concourantes, on en déduit que les hauteurs $\mathcal{D}_A$, $\mathcal{D}_B$ et $\mathcal{D}_C$ du triangle ABC sont concourantes.

Question 7

On note σ_A la symétrie centrale par rapport au point A, σ_B celle par rapport au point B, et σ_C celle par rapport au point C. On considère l'application $\sigma_C \circ \sigma_B \circ \sigma_A$. Est-ce une isométrie ? Est-elle directe ? Quelle est sa place dans la liste des isométries du plan ? Préciser si possible des éléments caractéristiques (angles, axe, centre, ou vecteur...) Combien a-t-elle de points fixes ? (Rappel : toutes les réponses doivent être démontrées.)

Comme $\sigma_C \circ \sigma_B \circ \sigma_A$ est la composée de trois rotations, c'est une rotation ou une translation. Chacune des rotations σ_A, σ_B et σ_C est une rotation d'angle π, et

$$\pi + \pi + \pi \equiv 3\pi \equiv \pi \not\equiv 0 \pmod{2\pi},$$

donc la composée est une rotation d'angle π, c'est-à-dire une symétrie centrale. En particulier, c'est une isométrie directe et elle a un unique point fixe (son centre).

D'après la question précédente, le point A est le milieu du segment $[B'C']$. On montre de même que B est le milieu de $[C'A']$ et C est le milieu de $[A'B']$.

On a donc

$$\sigma_A(B') = C' \qquad \sigma_B(C') = A' \qquad \sigma_C(A') = B',$$

et donc

$$(\sigma_C \circ \sigma_B \circ \sigma_A)(B') = B'.$$

L'unique point fixe (et le centre) de $\sigma_C \circ \sigma_B \circ \sigma_A$ est donc B'.