Géométrie en petite dimension

Feuille n°1 : inégalité triangulaire, diagrammes de Voronoï

Les sujets de TD sont disponibles sur la page web :
https://lectures.lionel.fourquaux.org/2016-2017/gpd/

Inégalité triangulaire

Exercice 1

Soient P, Q, R trois points du plan. Dans cet exercice, on notera $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$(\overrightarrow{QP} + \lambda \overrightarrow{QR})^2 = \overrightarrow{QP}^2 + 2\lambda \overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} + \lambda^2 \overrightarrow{QR}^2.$$

2. En considérant le discriminant du polynôme (en la variable λ) de droite dans l'égalité précédente, montrer que

$$\left| \overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} \right| \leqslant QP\,QR.$$

3. Montrer que

$$\overrightarrow{PR}^2 = \overrightarrow{QP}^2 - 2\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{QR}^2.$$

4. En déduire que

$$PR \leqslant PQ + QR.$$

5. Montrer que $PR = PQ + QR$ si et seulement si $Q \in [PR]$.
6. On considère maintenant quatre points P, Q, R et S. Montrer que

$$PS \leqslant PQ + QR + RS$$

et caractériser les configurations de quatre points P, Q, R et S qui vérifient l'égalité $PS = PQ + QR + RS$.

Diagrammes de Voronoï

Un *diagramme de Voronoï* est une famille de parties du plan (ou de l'espace, mais dans cet exercice on se limitera au plan) et de points associés telle que :

- chaque partie du plan a un unique point associé, qui est contenu dedans ;
- chaque partie est exactement égale à l'ensemble des points du plan qui sont plus proches du point associé à cette partie que des points associés aux autres parties.

Autrement dit, c'est une famille $(A_i, P_i)_{i \in I}$, où :

- I est un ensemble ;
- pour tout $i \in I$, A_i est une partie (i.e. un sous-ensemble) du plan et $P_i \in A_i$;
- pour tout $i \in I$, on a (en notant $\mathcal{P}$ le plan) :

$$A_i = \left\{ Q \in \mathcal{P} \;\middle/\; \forall j \in I \setminus \{i\}\ P_iQ \leqslant P_jQ \right\}.$$

Les parties A_i sont appelées les *cellules* du diagramme de Voronoï. Le point P_i associé à la cellule A_i est appelé le *germe* de la cellule.

Les diagrammes de Voronoï sont un outil utile pour représenter les zones de couverture d'antennes radio, ou pour étudier l'implantation d'écoles, d'hopitaux, de bureaux de poste, etc, dans une région.

Exercice 2 : Médiatrice, diagramme de 2 points

1. Soient A et B deux points du plan. Montrer que l'ensemble des points équidistants de A et B (autrement dit, l'ensemble des points P du plan tels que $PA = PB$) est une droite (qu'on notera Δ, et qui est appelée la *médiatrice* du segment $[AB]$).
2. Montrer que la droite Δ est orthogonale à la droite (AB).
3. Montrer que l'ensemble des points P du plan tels que $PA \leqslant PB$ est le demi-plan de frontière Δ contenant A.
4. Quel est le diagramme de Voronoï d'un ensemble de deux points distincts ?

Exercice 3

Soit $(A_i, P_i)_{i\in I}$ un diagramme de Voronoï. Si $i, j \in I$ avec $i \neq i$, notons $\Pi_{i,j}$ le demi-plan de frontière la médiatrice du segment $[P_i Pj]$ et qui contient le point P_i.

1. Montrer que, pour tout $i \in I$, on a :

$$A_i = \bigcap_{j\in I\setminus\{i\}} \Pi_{i,j}.$$

2. Dessiner le diagramme de Voronoï de trois points formant un triangle équilatéral.

Exercice 4

1. Que dire de la frontière entre deux cellules de Voronoï ?
2. Que dire du point commun à trois cellules de Voronoï, appelé sommet de Voronoï ?
3. Que dire du cercle centré en un sommet de Voronoï et passant par un germe d'une des trois cellules ?
4. Ajouter un point au triangle équilatéral de l'exercice précédent, et tracer le nouveau diagramme de Voronoï.
5. Ajouter un cinquième point très proche d'un sommet de Voronoï et tracer le nouveau diagramme de Voronoï. Toutes les cellules ont-elles changé ?

Exercice 5 : Convexité des cellules

On dit qu'une partie X du plan (ou de l'espace) est *convexe* si elle vérifie :

$$\forall (P, Q) \in X^2 \quad [PQ] \subseteq X,$$

autrement dit, pour tout couple (P, Q) de points de X, le segment $[PQ]$ tout entier est contenu dans X.

1. Montrer qu'une intersection de parties convexes du plan est convexe.
2. En déduire que les cellules d'un diagramme de Voronoï sont convexes.

Pour aller plus loin

Exercice 6

On rappelle qu'un quadrilatère d'un espace euclidien E est un *parallélogramme* si ses diagonales se coupent en leur milieu, appelé centre du parallélogramme.

Cette définition est aussi valable en dimension 1 et pour les cas où deux sommets coïncident. (Dans ces cas, le parallélogramme est plat).

On dit que deux bipoints (A, B) et (C, D) sont *équipollents* si le quadrilatère $(ABDC)$ est un parallélogramme.

1. Vérifier que pour tout couple de points (A, B), les bipoints (A, B) et (A, B) sont équipollents. On dit alors que la relation d'équipollence est *réflexive*.
2. Montrer que pour tous bipoints (A, B) et (C, D), si les bipoints (A, B) et (C, D) sont équipollents alors les bipoints (C, D) et (A, B) le sont aussi. On dit alors que la relation d'équipollence est *symétrique*.
3. Démontrer que la relation d'équipollence est *transitive*, c'est à dire que pour tous triplets (A, B), (C, D) et (F, G) de bipoints, si les bipoints (A, B) et (C, D) sont équipollents et si les bipoints (C, D) et (F, G) sont équipollents alors les bipoints (A, B) et (F, G) le sont aussi. (Indication : dans le cas où le quadrilatère $(ABGF)$ n'est pas plat, on pourra considérer la droite joignant les centres des parallélogrammes $(ABDC)$ et $(CDGF)$; dans le cas où le quadrilatère $(ABGF)$ est plat, on pourra utiliser le théorème de Thalès.)
4. On résume les trois propriétés précédentes en disant que la relation d'équipollence est *une relation d'équivalence*. La *classe d'équipollence* du bipoint (A, B) est par définition l'ensemble des bipoints équipollents à (A, B). Elle est appelée *vecteur* et notée $\overrightarrow{AB}$. Si (C, D) est équipollent à (A, B), on dit que (C, D) est un *représentant* de $\overrightarrow{AB}$. Montrer qu'étant donné un point A et un vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. On notera $B = t_{\vec{u}}(A)$.
5. Étant donnés un point A et un représentant (F, G) du vecteur $\vec{u}$, construire à la règle et au compas le point $t_{\vec{u}}(A)$.
6. Montrer que si deux bipoints (A, B) et (C, D) sont équipollents, alors les bipoints (A, C) et (B, D) le sont aussi.
7. On définit la somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par le procédé suivant :
   - On choisit un point A.
   - On détermine le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.
   - On détermine le point C tel que $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$.
   - On définit $\vec{u} + \vec{v} := \overrightarrow{AC}$.

   Montrer que la *somme* ainsi définie est indépendante du choix du point de base A, c'est à dire, montrer que si on choisit un autre point A' comme point de base, le bipoint (A', C') construit alors est équipollent au bipoint (A, C) construit en partant du point A. (Indication : On pourra montrer que (A, A') est équipollent à (C, C').)