Géométrie en petites dimensions

Feuille n°2 :
Longueur, mesures d'angles, mesures de surfaces

Mesures de longueurs

Exercice 1

Soit $(ABCD)$ un parallélogramme d'un plan euclidien E.

1. En utilisant une identité vérifiée par le produit scalaire, montrer que :

$$AC^2 - BD^2 = 4\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

2. Montrer que : $(AB) \perp (AD) \iff AC = BD$.
3. En utilisant une identité vérifiée par le produit scalaire, montrer que :

$$AB^2 - BC^2 = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

4. Montrer que : $(AC) \perp (BD) \iff AB = BC$.

Exercice 2

Soit $(ABCD)$ un parallélogramme d'un plan euclidien E.

1. Montrer que

$$AB^2 + BC^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} \quad \text{et} \quad CD^2 + DA^2 - BD^2 = 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}$$

2. Montrer que $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$.

Exercice 3

1. Rappeler la définition de la médiatrice d'un segment dans un plan euclidien.
2. Rappeler une caractérisation de la médiatrice d'un segment dans un plan euclidien.
3. Soit A, B, C trois points deux à deux distincts du plan euclidien. Supposons que les médiatrices de $[A, B]$ et de $[B, C]$ soient parallèles. Montrer que le triangle ABC est aplati.
4. Montrer que les médiatrices d'un triangle non aplati sont concourantes.

Mesures d'angles

Exercice 4

1. Rappeler le théorème de Chasles pour les mesures d'angles orientés.
2. Calculer la somme des mesures des angles orientés de vecteurs $(\widehat{\overrightarrow{P_iP_{i-1}}\overrightarrow{P_iP_{i+1}}})$ d'un pentagone $P_1P_2\cdots P_5$ d'un plan euclidien E.

Exercice 5

Soit A et B deux points distincts d'un plan euclidien E. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$.

Exercice 6

La relation de Chasles est-elle vraie pour les mesures d'angles géométriques ?

Mesures d'aire

Exercice 7

Soit ABC et $AB'C'$ deux triangles ayant le même sommet A et des base $[BC]$ et $[B'C']$ portées par la même droite. Montrer que

$$\frac{\mathcal{A}(ABC)}{\mathcal{A}(AB'C')} = \frac{BC}{B'C'}.$$

Exercice 8

1. Soit ABC un triangle et M un point du plan, distinct de A. On suppose que la droite (AM) coupe la droite (BC) en A'. Montrer que

$$\frac{\mathcal{A}(AMB)}{\mathcal{A}(AMC)} = \frac{A'B}{A'C}.$$

2. Soit ABC un triangle et $B' \in [AB]$ et $C' \in [AC]$. Montrer que si $(B'C')$ est parallèle à (BC) alors

$$\frac{BB'}{CC'} = \frac{AB}{AC}.$$

Indication : On pourra chercher à écrire $\frac{BB'}{BA}$ comme un rapport d'aire.