UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Géométrie en petite dimension

Feuille n°5 : Isométries et homothéties

Les sujets de TD sont disponibles sur la page web :
https://lectures.lionel.fourquaux.org/2016-2017/gpd/

Isométrie

Exercice 1

On cherche à déterminer toutes les isométries qui conservent globalement un triangle équilatéral $\mathcal{T}$.

1. Montrer qu'une isométrie qui conserve globalement $\mathcal{V}$ conserve le centre du cercle circonscrit.
2. En déduire la liste des isométries qui conservent globalement $\mathcal{V}$. (On trouvera six isométries)
3. Vérifier que la composée de deux éléments quelconques de cette liste est encore dans cette liste. Il suffira d'écrire la table de composition, sans justifier le calcul des composés.

Exercice 2

Soit ABC un triangle dans un plan euclidien orienté E tel que la mesure principale de Mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}})$ est positive. On construit à l'extérieur les triangles rectangles isocèles ACQ et APB tels que Mes $(\widehat{\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AQ}}) = \pi/2$ et Mes $(\widehat{\overrightarrow{AP}\overrightarrow{AB}}) = \pi/2$
Montrer que les segments $[CP]$ et $[BQ]$ sont orthogonaux et de même longueur.

Exercice 3

Soit ABC un triangle dans un plan euclidien orienté E tel que la mesure principale de Mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}})$ est positive. On construit à l'extérieur les triangles équilatéraux BCA'', CAB'' et ABC''. On désigne par A', B', C' les centres de gravité respectifs et par G le centre de gravité de ABC. Le but de l'exercice est de montrer que $A'B'C'$ est un triangle équilatéral et que G est son centre de gravité.

1. On rappelle que si I est le milieu de $[BC]$ alors $\overrightarrow{AG} = 2/3\overrightarrow{AI}$. Montrer que $\overrightarrow{AA''} = 3\overrightarrow{GA'}$, et $\overrightarrow{BB''} = 3\overrightarrow{GB'}$ et $\overrightarrow{CC''} = 3\overrightarrow{GC'}$
2. En utilisant la rotation de centre A et d'angle $-\pi/3$ montrer que $BB'' = CC''$ et que Mes $(\widehat{\overrightarrow{BB''}\overrightarrow{CC''}}) =$ Mes $(\widehat{\overrightarrow{GB'}\overrightarrow{GC'}}) = 2\pi/3$. Ecrire les relations analogues.
3. Montrer que G est le centre du cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$.
4. Montrer que $A'B'C'$ est un triangle équilatéral et que G est son centre de gravité.

Exercice 4

Soit E un plan euclidien orienté. Soit d_1, d_2, d_3 trois droites parallèles.

1. Soit ABC un triangle équilatéral tel que la mesure principale de Mes $(\widehat{\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}})$ est positive et tel que A appartient à d_1, B à d_2 et C à d_3. Montrer que C est le point d'intersection de la droite d_3 et de l'image de d_2 par une rotation de centre A et d'angle $\pi/3$.
2. Construire un triangle tel que A appartient à d_1, B à d_2 et C à d_3.

Homothétie, similitudes

Exercice 5

(Théorème de Thalès par les homothéties.) Soit E un plan euclidien orienté. Soit A un point de E et d et d' deux droites passant par A. Soit B et C deux points de d et B' et C' deux points de d'.

1. On suppose que (BB') est parallèle à (CC'). Montrer en utilisant l'homothétie h de centre A qui envoie B sur C que
$$\frac{\overline{CC'}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AB'}}.$$
2. On suppose que $\frac{\overline{CC'}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$. Montrer que (BB') est parallèle à (CC').

Exercice 6

Soit ABC un triangle équilatéral dans un plan euclidien orienté E tel que la mesure principale de $\mathrm{Mes}\,(\widehat{\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}}) = \pi/3$. On note B' le milieu de $[AC]$. Construire l'image de ce triangle par la similitude composée de l'homothétie de centre B' de rapport $\sqrt{3}$ et de la rotation de centre B' et d'angle $-\pi/3$.