

Licence de Mathématiques

AG1 : Algèbre et géométrie 1
Épreuve du jeudi 26 octobre 2017
Début 15h35 - Durée 20 mn

La consultation de document et l'utilisation de calculatrice ne sont pas autorisées. Il est rappelé qu'en mathématiques, tout résultat doit être référencé ou démontré. Bon courage.

- 1) Soient E , F et G trois ensembles, et $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications. On suppose que $g \circ f$ est injective. Montrer que f est injective.
- 2) Soit z un nombre complexe tel que $z^5 = 1$ mais $z \neq 1$.
 - (a) Calculer $(z + z^4)^2$ en fonction de z^2 et de z^3 .
 - (b) Calculer $(1 + z + z^2 + z^3 + z^4)(1 - z)$ et en déduire la valeur de $1 + z + z^2 + z^3 + z^4$.
 - (c) Que vaut $|z|$? En déduire que $z^4 = \bar{z}$.

On écrit maintenant $z = x + iy$ avec x, y réels.
 - (d) Utiliser 2c) pour écrire $z + z^4$ en fonction de x .
 - (e) Utiliser 2a) pour écrire $z^2 + z^3$ en fonction de x et de x^2 .
 - (f) En déduire une égalité $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = P(x)$ ou P est un polynôme du second degré à coefficients réels que l'on déterminera.
 - (g) Résoudre l'équation $P(x) = 0$.
 - (h) Que vaut $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$? On pourra s'aider d'un dessin.