Équations de droites dans le plan, de droites et de plans dans l'espace. Produit vectoriel dans l'espace. Distance d'un point à une droite, à un plan.

1 Équations paramétrique et implicite (cartésienne) d'une droite du plan dans un repère orthonormé ; distance d'un point du plan à une droite du plan.

Dans tout ce qui suit, on fixe un repère orthonormé [1] $\mathcal{R}$ du plan euclidien $\mathcal{P}$.

1.1 Équation paramétrique d'une droite du plan

Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{P}$. Étant donnés un point $A = (x_0, y_0)_{\mathcal{R}}$ de $\mathcal{D}$ et un vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}$ de $\mathcal{D}$, on sait que $\mathcal{D} = \{T_{t\overrightarrow{u}}(A)\}_{t\in\mathbf{R}}$. On en déduit qu'on peut écrire :

$$\mathcal{D} = \{T_{t\cdot\overrightarrow{u}}(A)\}_{t\in\mathbf{R}} = \{(x_0 + t\,x_1, y_0 + t\,y_1)_{\mathcal{R}}\}_{t\in\mathbf{R}}.$$

En d'autres termes, si $f\colon \mathbf{R} \to \mathcal{P}$ désigne l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ t & \longmapsto & (x_0 + t\,x_1, y_0 + t\,y_1)_{\mathcal{R}} \end{array}$$

on peut écrire $\mathcal{D} = f(\mathbf{R})$. On notera que f est injective et induit donc une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathcal{D}$.

Réciproquement on a :

Proposition 1.2. *Soit (a, b, c, d) un quadruplet de réels, avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Alors l'ensemble*

$$\{(c + t\,a, d + t\,b)_{\mathcal{R}}\}_{t\in\mathbf{R}}$$

est une droite de $\mathcal{P}$ admettant $(a, b)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}$ comme vecteur directeur et contenant le point $(c, d)_{\mathcal{R}}$.

Si $\mathcal{D}$ est une droite de $\mathcal{P}$, déterminer une équation paramétrique de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{R}$ signifie déterminer un quadruplet de réels (a, b, c, d), avec $(a, b) \neq (0, 0)$, tel que

$$\mathcal{D} = \{(c + t\,a, d + t\,b)_{\mathcal{R}}\}_{t\in\mathbf{R}}.$$

1. Pour une partie de ce qui suit, le fait que le repère soit orthonormé n'est pas essentiel et on pourrait travailler dans un repère quelconque ; cette remarque vaudra aussi quand on travaillera dans l'espace.

1.3 Équation implicite (ou cartésienne) d'une droite du plan

À partir d'un point et d'un vecteur directeur : soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{P}$, $A = (x_0, y_0)_{\mathcal{R}}$ un point de $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Soit $M \in \mathcal{P}$. Alors $M \in \mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est colinéraire à $\overrightarrow{u}$ si et seulement si $\det_{\mathcal{R}}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}) = 0$. On en tire :

$$\mathcal{D} = \{(x, y)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{P}, \quad y_1(x - x_0) - x_1(y - y_0) = 0\}$$

À partir d'un point et d'un vecteur normal :

Définition 1.4. Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{P}$. Un *vecteur normal à* $\mathcal{D}$ est un vecteur *non nul* orthogonal à $\mathcal{D}$.

Proposition 1.5. *Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{P}$, $A \in \mathcal{D}$ et $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$. Soit $M \in \mathcal{P}$. Alors $M \in \mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.*

Proposition 1.6. *Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{P}$. Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{D}$. Alors l'ensemble des vecteurs normaux à $\mathcal{D}$ est l'ensemble*

$$\{\alpha \cdot \overrightarrow{n}\}_{\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}}.$$

En d'autres termes, c'est l'ensemble des vecteurs non nuls colinéaires à $\overrightarrow{n}$.

En outre l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\mathcal{D}$ est l'ensemble

$$\{\alpha \cdot \overrightarrow{n}\}_{\alpha \in \mathbf{R}}.$$

En d'autres termes, c'est l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{n}$.

Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{P}$, $A = (x_0, y_0)_{\mathcal{R}}$ un point de $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{n} = (x_2, y_2)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}$ un vecteur normal à $\mathcal{D}$. Soit $M \in \mathcal{P}$. Alors $M \in \mathcal{D}$ si et seulement si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.

On en tire

$$\mathcal{D} = \{(x, y)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{P}, \quad x_2(x - x_0) + y_2(y - y_0) = 0\}.$$

Réciproquement, on a :

Proposition 1.7. *Soit (a, b, c) un triplet de réels, avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Alors l'ensemble*

$$\{(x, y)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{P}, \quad a\,x + b\,y + c = 0\}$$

est une droite de $\mathcal{P}$ admettant $(-b, a)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}$ comme vecteur directeur et $(a, b)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}$ comme vecteur normal.

Si $a \neq 0$, $\mathcal{D}$ contient le point $(-\frac{c}{a}, 0)_{\mathcal{R}}$.

Si $b \neq 0$, $\mathcal{D}$ contient le point $(0, -\frac{c}{b})_{\mathcal{R}}$.

Si $\mathcal{D}$ est une droite de $\mathcal{P}$, déterminer une équation implicite (ou cartésienne) de $\mathcal{D}$ dans le repère $\mathcal{R}$, c'est déterminer un triplet de réels (a, b, c), avec $(a, b) \neq (0, 0)$, tel que

$$\mathcal{D} = \{(x, y)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{P}, \quad a\,x + b\,y + c = 0\}.$$

On dit alors que $a\,x + b\,y + c = 0$ *est une équation implicite (ou cartésienne) de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{R}$.*

1.8 Passage d'une équation implicite à une équation paramétrique et réciproquement

Ce qui précède explique notamment comment :

- étant donnés un point et un vecteur directeur d'une droite de $\mathcal{P}$, on peut déterminer une équation paramétrique ou implicite de cette droite dans $\mathcal{R}$;
- étant donnés une équation paramétrique ou implicite d'une droite de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{R}$, on en déduit un point et un vecteur directeur de cette droite.

Le passage du paramétrique à l'implicite et réciproquement peut donc se faire en « transitant » par la donnée d'un point et d'un vecteur directeur.

On peut aussi passer directement d'une équation implicite à une équation paramétrique de la manière suivante. Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{P}$ et (a, b, c) un triplet de réels, avec $(a, b) \neq 0$, tel que $ax + by + c = 0$ est une équation implicite de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{R}$. Supposons en outre $a \neq 0$ (le cas $b \neq 0$ se traitant de manière similaire). On peut écrire

$$\mathcal{D} = \{(x, y)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{P}, \quad x = -\frac{b}{a}\,y - \frac{c}{a}\}$$

Or, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on a $x = -\frac{b}{a}\,y - \frac{c}{a}$ si et seulement s'il existe $t \in \mathbf{R}$ tel que $y = t$ et $x = -\frac{b}{a}\,t - \frac{c}{a}$ (en termes informels, « on prend y comme paramètre »). On a donc

$$\mathcal{D} = \{(-\frac{b}{a}\,t - \frac{c}{a}, t)_{\mathcal{R}}\}_{t \in \mathbf{R}}$$

ce qui est bien une équation paramétrique de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{R}$.

1.9 Distance d'un point du plan à une droite du plan

Théorème 1.10. *Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{P}$, et $A \in \mathcal{P}$.*

1. *Il existe un unique point H de $\mathcal{D}$ tel que le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal à $\mathcal{D}$. Ce point est appelé* projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$.
2. *L'application*
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbf{R}^+ \\ M & \longmapsto & AM \end{array}$$
admet un minimum en un unique point de $\mathcal{D}$, qui est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$. La valeur de ce minimum est appelé distance du point A à la droite $\mathcal{D}$ *et est notée $d(A, \mathcal{D})$. On a $d(A, \mathcal{D}) = 0$ si et seulement si $A \in \mathcal{D}$.*
3. *Soit (a, b, c) un triplet de réels avec $(a, b) \neq (0, 0)$ tel que $ax+by+c = 0$ est une équation implicite de $\mathcal{D}$ dans le repère $\mathcal{R}$. Soit $A = (x_0, y_0)_{\mathcal{R}}$ avec $x_0, y_0 \in \mathbf{R}$. Alors*
$$d(A, \mathcal{D}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

2 Définition d'un plan de l'espace

Définition 2.1. Soit $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un élément de $\mathcal{E} \times \overrightarrow{\mathcal{E}} \times \overrightarrow{\mathcal{E}}$ tels que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un couple de vecteurs non colinéaires. On pose

$$\mathcal{P}(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) := \{M \in \mathcal{E}, \exists(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2, \overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{u} + \beta \cdot \overrightarrow{v}\}.$$

L'ensemble $\mathcal{P}(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est appelé « le plan contenant A et dirigé par le couple de vecteurs $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ ».

Proposition 2.2. *Soit $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un élément de $\mathcal{E} \times \overrightarrow{\mathcal{E}} \times \overrightarrow{\mathcal{E}}$ tels que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un couple de vecteurs non colinéaires. Alors $A \in \mathcal{P}(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.*

Soit $B \in \mathcal{P}(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Alors $\mathcal{P}(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \mathcal{P}(B, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Définition 2.3. Une partie $\mathcal{P}$ de $\mathcal{E}$ est un *plan* de $\mathcal{E}$ s'il existe $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \mathcal{E} \times \overrightarrow{\mathcal{E}} \times \overrightarrow{\mathcal{E}}$ tel que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un couple de vecteurs non colinéaires et $\mathcal{P} = \mathcal{P}(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Le couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est alors appelé un *couple de vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$*.

Tout comme une droite n'admet pas un unique vecteur directeur, un plan n'admet pas un unique couple de vecteurs directeurs. Tout comme on peut décrire l'ensemble des vecteurs directeurs d'une droite (du plan ou de l'espace) à partir d'un seul de ses vecteurs directeurs, on peut décrire l'ensemble des couples de vecteurs directeurs d'un plan de l'espace à partir d'un seul de ses couples de vecteurs directeurs, mais c'est un peu plus compliqué. Nous ne le ferons pas ici, notamment parce qu'on peut aussi décrire un plan de l'espace par la donnée d'un point et d'un vecteur normal (*cf.* plus bas), et qu'on peut facilement décrire l'ensemble des vecteurs normaux à un plan donné.

3 Produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace dans un repère orthonormé

L'espace euclidien $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}$.

Définition 3.1. Soit $\overrightarrow{u} = (x, y, z)_{\mathcal{R}}$ et $\overrightarrow{v} = (x', y', z')_{\mathcal{R}}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, avec $x, y, z, x', y', z' \in \mathbf{R}$. Le *produit vectoriel* de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans le repère $\mathcal{R}$, noté $\overrightarrow{u} \wedge_{\mathcal{R}} \overrightarrow{v}$ (ou le plus souvent $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ pour alléger l'écriture) est le vecteur de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ donné par les coordonnées suivantes

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} := (yz' - y'z, x'z - xz', xy' - x'y)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}.$$

Noter qu'on a ainsi une application

$$\begin{array}{ccc} \overrightarrow{\mathcal{E}} \times \overrightarrow{\mathcal{E}} & \longrightarrow & \overrightarrow{\mathcal{E}} \\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) & \longmapsto & \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \end{array}$$

et que contrairement au produit scalaire, le produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace est un vecteur de l'espace (et non un réel).

Le produit vectoriel nous sera utile via les propriétés suivantes :

Proposition 3.2. *Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.*

1. *On a $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v} \cdot (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = 0$*
2. *On a $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.*
3. *Supposons $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires. Pour tout $\overrightarrow{w} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$, on a $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ sont colinéaires.*

Remarque 3.3. (hors programme) Via le produit vectoriel, on peut définir le déterminant d'un triplet de vecteurs de l'espace dans le repère $\mathcal{R}$. Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in \overrightarrow{\mathcal{E}}^3$. On pose alors

$$\det_{\mathcal{R}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \wedge_{\mathcal{R}} \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w}.$$

Cette définition généralise de manière naturelle le déterminant en dimension 2 pour des raisons que nous n'exposerons pas ici.

4 Équations paramétriques et implicites (cartésiennes) d'un plan de l'espace dans un repère orthonormé ; distance d'un point de l'espace à un plan de l'espace

L'espace euclidien $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}$.

4.1 Équation paramétrique d'un plan de l'espace

Soit $\mathcal{P}$ un plan de $\mathcal{E}$. Soit $A = (x_0, y_0, z_0)_{\mathcal{R}}$, $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}$ et $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2, z_2)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}$ tels que $\mathcal{P} = \mathcal{P}(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On peut alors décrire $\mathcal{P}$ de la manière suivante :

$$\mathcal{P} = \{(x_0 + t\,x_1 + u\,x_2, y_0 + t\,y_1 + u\,y_2, z_0 + t\,z_1 + u\,z_2,)_{\mathcal{R}}\}_{(t,u)\in\mathbf{R}^2}.$$

En d'autres termes, si $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathcal{E}$ désigne l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ t & \longmapsto & (x_0 + t\,x_1 + u\,x_2, y_0 + t\,y_1 + u\,y_2, z_0 + t\,z_1 + u\,z_2)_{\mathcal{R}} \end{array}$$

on peut écrire $\mathcal{P} = f(\mathbf{R}^2)$. On notera que f est injective et induit donc une bijection de $\mathbf{R}^2$ sur $\mathcal{P}$.

Réciproquement on a :

Proposition 4.2. *Soit $(a, b, c, a', b', c', e, f, g) \in \mathbf{R}^9$ tel que les vecteurs $(a, b, c)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}$ et $(a', b', c')_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}$ sont non colinéaires. Alors l'ensemble*

$$\{(e + t\,a + u\,a', f + t\,b + u\,b', g + t\,c + u\,c')_{\mathcal{R}}\}_{(t,u)\in\mathbf{R}^2}$$

est le plan de $\mathcal{P}$ contenant le point $(e, f, g)_{\mathcal{R}}$ et dirigé par le couple de vecteurs $((a, b, c)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}, (a', b', c')_{\overrightarrow{\mathcal{R}}})$.

Si $\mathcal{P}$ est un plan de $\mathcal{E}$, déterminer une équation paramétrique de $\mathcal{P}$ dans le repère $\mathcal{R}$ signifie déterminer $(a, b, c, a', b', c', e, f, g) \in \mathbf{R}^9$ tel que les vecteurs $(a, b, c)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}$ et $(a', b', c')_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}$ sont non colinéaires et tel que

$$\mathcal{P} = \{(e + t\,a + u\,a', f + t\,b + u\,b', g + t\,c + u\,c')_{\mathcal{R}}\}_{(t,u)\in\mathbf{R}^2}.$$

4.3 Équation implicite (ou cartésienne) d'un plan de l'espace

De façon similaire au procédé permettant d'obtenir une équation implicite d'une droite du plan à partir d'un point et d'un vecteur directeur de cette droite, on peut obtenir une équation implicite d'un plan de l'espace à partir d'un point et d'un couple de vecteurs directeurs de ce plan. Ce procédé met en jeu les propriétés du déterminant d'un triplet de vecteurs de l'espace, ce qui est hors programme. On se « limitera » donc ici à déterminer une équation implicite d'un plan de l'espace à partir de la donnée d'un point et d'un vecteur normal, en utilisant le produit vectoriel pour déterminer un vecteur normal à partir d'un couple de vecteurs directeurs. Les guillemets dans la phrase précédente sont dûs au fait que les méthodes sont en fait essentiellement équivalentes (le produit vectoriel pouvant être vu comme un substitut au déterminant, *cf.* la remarque hors programme ci-dessus).

Définition 4.4. Soit $\mathcal{P}$ un plan de $\mathcal{E}$. Soit $\overrightarrow{n} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$. On dit que $\overrightarrow{n}$ est un *vecteur orthogonal à* $\mathcal{P}$ si pour tout couple (A, B) de points de $\mathcal{P}$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux.

On dit que $\overrightarrow{n}$ est un *vecteur normal à* $\mathcal{P}$ si $\overrightarrow{n}$ est non nul et orthogonal $\mathcal{P}$.

Proposition 4.5. *Soit $\mathcal{P}$ un plan de $\mathcal{E}$. Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un couple de vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$. Soit $\overrightarrow{n} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$. Alors $\overrightarrow{n}$ est un vecteur orthogonal à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ si et seulement si $\overrightarrow{n}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.*

En particulier $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

En particulier, si $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$, l'ensemble des vecteurs normaux à $\mathcal{P}$ est l'ensemble des vecteurs non nuls colinéaires à $\overrightarrow{n}$ et l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\mathcal{P}$ est l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{n}$.

La proposition suivante montre qu'un plan de l'espace est entièrement déterminé par la donnée un point et d'un vecteur normal.

Proposition 4.6. *Soit $\mathcal{P}$ un plan de $\mathcal{E}$. Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$. Soit $A \in \mathcal{P}$. Alors*

$$\mathcal{P} = \{M \in \mathcal{P}, \quad \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0\}.$$

Soit $\mathcal{P}$ un plan de $\mathcal{E}$, $A = (x_0, y_0, z_0)_{\mathcal{R}}$ un point de $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{n} = (x_1, y_1, z_1)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}$ un vecteur normal à $\mathcal{D}$. Soit $M \in \mathcal{P}$. Alors $M \in \mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$.

On en tire

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{P}, \quad x_1(x - x_0) + y_1(y - y_0) + z_1(z - z_0) = 0\}.$$

Réciproquement, on a :

Proposition 4.7. *Soit* (a, b, c, d) *un triplet de réels, avec* $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$*. Alors l'ensemble*

$$\{(x, y, z)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{P}, \quad a\,x + b\,y + c\,z + d = 0\}$$

est un plan de $\mathcal{E}$ *admettant* $(a, b, c)_{\mathcal{R}}$ *comme vecteur normal.*
Si $a \neq 0$*,* $\mathcal{P}$ *contient le point* $(-\frac{d}{a}, 0, 0)_{\mathcal{R}}$*.*
Si $b \neq 0$*,* $\mathcal{P}$ *contient le point* $(0, -\frac{d}{b}, 0)_{\mathcal{R}}$*.*
Si $c \neq 0$*,* $\mathcal{P}$ *contient le point* $(0, 0, -\frac{d}{c})_{\mathcal{R}}$*.*

Si $\mathcal{P}$ est un plan de $\mathcal{E}$, déterminer une équation implicite (ou cartésienne) de $\mathcal{P}$ dans le repère $\mathcal{R}$, c'est déterminer un quadruplet de réels (a, b, c, d), avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, tel que

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{E}, \quad a\,x + b\,y + c\,z + d = 0\}$$

On dit alors que $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ *est une équation implicite (ou cartésienne) du plan* $\mathcal{P}$ *dans le repère* $\mathcal{R}$.

4.8 Passage d'une équation implicite à une équation paramétrique et réciproquement

Ce qui précède explique comment :

- étant donnés un point et un couple de vecteurs directeurs d'un plan de $\mathcal{E}$, on peut déterminer une équation paramétrique de ce plan dans $\mathcal{R}$, et réciproquement
- étant donnés un point et un vecteur normal d'un plan de $\mathcal{E}$, on peut déterminer une équation implicite de ce plan dans le repère $\mathcal{R}$ et réciproquement

Notons en outre qu'étant donné un couple de vecteurs directeurs $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ d'un plan, on peut déterminer facilement un vecteur normal à ce plan : on prend le produit vectoriel $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$. Ceci permet le passage d'une équation paramétrique à une équation implicite, en « transitant » par la donnée d'un point et d'un couple de vecteurs directeurs.

Expliquons à présent comment passer d'une équation implicite à une équation paramétrique. Soit $\mathcal{P}$ un plan de $\mathcal{E}$ et (a, b, c, d) un quadruplet de réels, avec $(a, b, c) \neq 0$, tel que $ax + by + cz + d = 0$ est une équation implicite de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{R}$. Supposons en outre $a \neq 0$ (les cas $b \neq 0$ et $c \neq 0$ se traitant de manière similaire). On peut écrire

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{P}, \quad x = -\frac{b}{a}\,y - \frac{c}{a}\,z - \frac{d}{a}\}$$

Or, pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^2$, on a $x = -\frac{b}{a}\,y - \frac{c}{a}\,z - \frac{d}{a}$ si et seulement s'il existe $(t, u) \in \mathbf{R}^2$ tel que $y = t$ et $z = u$ et $x = -\frac{b}{a}\,t - \frac{c}{a}\,u - \frac{d}{a}$ (en termes informels, « on prend y et z comme paramètres »). On a donc

$$\mathcal{P} = \{(-\frac{b}{a}\,t - \frac{c}{a}\,u - \frac{d}{a}, t, u)_{\mathcal{R}}\}_{(t,u)\in\mathbf{R}^2}$$

ce qui est bien une équation paramétrique de $\mathcal{P}$ dans le repère $\mathcal{R}$. En particulier, un couple de vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$ est $((-\frac{b}{a}, 1, 0)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}, (0, -\frac{c}{a}, 1)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}})$

4.9 Distance d'un point de l'espace à un plan de l'espace

Théorème 4.10. *Soit $\mathcal{P}$ un plan de $\mathcal{E}$, et $A \in \mathcal{E}$.*

1. *Il existe un unique point H de $\mathcal{P}$ tel que le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal à $\mathcal{P}$. Ce point est appelé le* projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.
2. *L'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbf{R}^+ \\ M & \longmapsto & AM \end{array}$$

admet un minimum en un unique point de $\mathcal{P}$, qui est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$. La valeur de ce minimum est appelé distance du point A au plan $\mathcal{P}$ *et est notée $d(A, \mathcal{P})$. On a $d(A, \mathcal{P}) = 0$ si et seulement si $A \in \mathcal{P}$.*

3. *Soit (a, b, c, d) un quadruplet de réels avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ tel que $ax + by + cz + d = 0$ est une équation implicite de $\mathcal{P}$ dans le repère $\mathcal{R}$. Soit $A = (x_0, y_0, z_0)_{\mathcal{R}}$ avec $x_0, y_0, z_0 \in \mathbf{R}$. Alors*

$$d(A, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

5 Équations paramétrique et implicites (cartésiennes) d'une droite de l'espace dans un repère orthonormé ; distance d'un point de l'espace à une droite de l'espace.

5.1 Équation paramétrique d'une droite de l'espace

Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{E}$. Étant donné un point $A = (x_0, y_0, z_0)_{\mathcal{R}}$ de $\mathcal{D}$ et un vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}$ de $\mathcal{D}$, on sait que $\mathcal{D} = \{T_{t\overrightarrow{u}}(A)\}_{t\in\mathbf{R}}$. On peut alors décrire $\mathcal{D}$ de la manière suivante :

$$\mathcal{D} = \{T_{t\overrightarrow{u}}(A)\}_{t\in\mathbf{R}} = \{(x_0 + t\,x_1, y_0 + t\,y_1, z_0 + t\,z_1)_{\mathcal{R}}\}_{t\in\mathbf{R}}.$$

En d'autres termes, si $f\colon \mathbf{R} \to \mathcal{E}$ désigne l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ t & \longmapsto & (x_0 + t\,x_1, y_0 + t\,y_1, z_0 + t\,z_1)_{\mathcal{R}} \end{array}$$

on peut écrire $\mathcal{D} = f(\mathbf{R})$. On notera que f est injective et induit donc une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathcal{D}$.

Réciproquement on a :

Proposition 5.2. *soit (a, b, c, d, e, f) un sextuplet de réels, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Alors l'ensemble*

$$\{(d + t\,a, e + t\,b, f + t\,c)_{\mathcal{R}}\}_{t\in\mathbf{R}}$$

est une droite de $\mathcal{E}$ admettant $(a, b, c)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}$ comme vecteur directeur et contenant le point $(d, e, f)_{\mathcal{R}}$.

Si $\mathcal{D}$ est une droite de $\mathcal{E}$, déterminer une équation paramétrique de $\mathcal{D}$ dans le repère $\mathcal{R}$ signifie déterminer un sextuplet de réels (a, b, c, d, e, f), avec $(a, b, c, d, e, f) \neq (0, 0)$, tel que

$$\mathcal{D} = \{(d + t\,a, e + t\,b, f + t\,c)_{\mathcal{R}}\}_{t\in\mathbf{R}}.$$

5.3 Système d'équations implicites (cartésiennes) d'une droite de l'espace

Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{E}$. Soit $A = (x_0, y_0, z_0)_{\mathcal{R}}$ un point de $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1, z_1)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Soit $M \in \mathcal{P}$. Alors $M \in \mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$. On en tire

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{E}, \quad \left\{ \begin{array}{rll} z_1(y - y_0) - y_1(z - z_0) & = 0 & (L_1) \\ x_1(z - z_0) - z_1(x - x_0) & = 0 & (L_2) \\ y_1(x - x_0) - x_1(y - y_0) & = 0 & (L_3) \end{array} \right. \}$$

Si $M = (x, y, z)_{\mathcal{R}}$, la relation $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}) = 0$ se traduit dans le système ci-dessus par le fait que $x_1(L_1) + y_1(L_2) + z_1(L_3)$ est l'équation $0 = 0$. Comme $(x_1, y_1, z_1) \neq (0, 0, 0)$, on en déduit que le système de trois équations ci-dessus est équivalent au système de deux équations obtenu en supprimant de manière adéquate une des équations.

Par exemple si $z_1 \neq 0$, le système est équivalent au système obtenu en remplaçant (L_3) par $(L_3) + \frac{x_1}{z_1}(L_1) + \frac{y_1}{z_1}(L_2)$ et on peut écrire

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{E}, \quad \left\{ \begin{array}{rl} z_1(y - y_0) - y_1(z - z_0) & = 0 \\ x_1(z - z_0) - z_1(x - x_0) & = 0 \end{array} \right. \}$$

Réciproquement, on a :

Proposition 5.4. *Soit* (a,b,c,d) *et* (a',b',c',d') *deux quadruplets de réels tels que les vecteurs* $(a,b,c)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}$ *et* $(a',b',c')_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}$ *sont non colinéaires. Alors l'ensemble*

$$\{(x,y,z)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{E}, \quad \begin{cases} a\,x + b\,y + c\,z + d &= 0 \\ a'\,x + b'\,y + c'\,z + d' &= 0 \end{cases} \}$$

est une droite de $\mathcal{E}$.

La démonstration sera donnée en cours et utilisera la méthode dite du pivot dans la résolution des systèmes d'équations linéaire. Elle fournit en fait un moyen de passer d'un système d'équations implicites d'une droite de l'espace à une équation paramétrique.

Si $\mathcal{D}$ est une droite de $\mathcal{E}$, déterminer un système d'équations implicites (ou cartésiennes) de $\mathcal{D}$ dans le repère $\mathcal{R}$, c'est déterminer deux quadruplets de réels (a,b,c,d) et (a',b',c',d') tel que les vecteurs $(a,b,c)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}$ et $(a',b',c')_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}$ sont non colinéaires et tel que

$$\mathcal{D} = \{(x,y,z)_{\mathcal{R}} \in \mathcal{E}, \quad \begin{cases} a\,x + b\,y + c\,z + d &= 0 \\ a'\,x + b'\,y + c'\,z + d' &= 0 \end{cases} \}$$

On dit alors que $\begin{cases} a\,x + b\,y + c\,z + d &= 0 \\ a'\,x + b'\,y + c'\,z + d' &= 0 \end{cases}$ *est un système d'équations implicites (ou cartésiennes) de la droite* $\mathcal{D}$ *dans le repère* $\mathcal{R}$.

Notons qu'en particulier on a $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ et $(a',b',c') \neq (0,0,0)$. Ainsi si $\mathcal{P}_1$ est le plan d'équation $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{P}_2$ le plan d'équation $a'\,x + b'\,y + c'\,z + d = 0$ dans $\mathcal{R}$, le système d'équations ci-dessus décrit géométriquement $\mathcal{D}$ comme l'intersection de deux plans de l'espace.

En outre on sait que $\overrightarrow{n}_1 := (a,b,c)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$ et $\overrightarrow{n}_2 := (a',b',c')_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_2$. Considérons alors $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Comme on a $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$, $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à $\overrightarrow{n}_1$. De même $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à $\overrightarrow{n}_2$. On en déduit que $\overrightarrow{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{n}_1 \wedge \overrightarrow{n}_2$. Ainsi $\overrightarrow{n}_1 \wedge \overrightarrow{n}_2$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

5.5 Passage d'un système d'équations implicites à une équation paramétrique et réciproquement

Ce qui précède explique comment :

- étant donné un point et un vecteur directeur d'une droite de $\mathcal{E}$, on peut déterminer une équation paramétrique de cette droite dans $\mathcal{R}$, et réciproquement

- étant donné un point et un vecteur directeur d'une droite de $\mathcal{E}$, on peut déterminer un système d'équations implicites de cette droite dans $\mathcal{R}$
- étant donné un système d'équations implicites d'une droite de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{R}$, on peut déterminer une équation paramétrique de cette droite dans $\mathcal{R}$

Le passage du paramétrique à l'implicite peut alors se faire en « transitant » par la donnée d'un point et d'un vecteur directeur.

6 Distance d'un point du plan à une droite du plan

Théorème 6.1. *Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{E}$, et $A \in \mathcal{E}$.*

1. *Il existe un unique point H de $\mathcal{D}$ tel que le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal à $\mathcal{D}$. Ce point est appelé* projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$.
2. *L'application*
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbf{R}^+ \\ M & \longmapsto & AM \end{array}$$
admet un minimum en un unique point de $\mathcal{D}$, qui est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$. La valeur de ce minimum est appelé distance du point A à la droite $\mathcal{D}$ *et est notée $d(A, \mathcal{D})$. On a $d(A, \mathcal{D}) = 0$ si et seulement si $A \in \mathcal{D}$.*
3. *Soit B un point de $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Alors*
$$d(A, \mathcal{D}) = \frac{\left|\left|\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{u}\right|\right|}{||\overrightarrow{u}||}.$$
En particulier si on note $A = (x_0, y_0, z_0)_{\mathcal{R}}$, $B = (x_1, y_1, z_1)$ avec $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1 \in \mathbf{R}$ et $\overrightarrow{u} = (a, b, c)_{\overrightarrow{\mathcal{R}}}$ avec $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, la quantité $d(A, \mathcal{D})^2$ est égale à
$$\frac{[(y_0 - y_1)c - (z_0 - z_1)b]^2 + [(x_0 - x_1)c - (z_0 - z_1)a]^2 + [(x_0 - x_1)b - (y_0 - y_1)a]^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$