UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et géométrie 1

Corrigé de l'examen (session 1)

Exercice 1

Définir le barycentre de deux points pondérés. (Les notations employées doivent être soigneusement expliquées. Aucune démonstration n'est demandée.)

Notons $\mathcal{E}$ le plan ou l'espace affine. Soient (A, α) et (B, β) deux points pondérés, c'est-à-dire deux éléments de $\mathcal{E} \times \mathbb{R}$. Supposons de plus que $\alpha + \beta \neq 0$. Le *barycentre* des points pondérés (A, α) et (B, β) est l'unique point $G \in \mathcal{E}$ tel que

$$\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

Exercice 2

Déterminer un couple d'entiers $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $86u + 31v = 1$. (Les calculs effectués doivent être inclus dans la réponse.)

On peut utiliser pour cela l'algorithme d'Euclide étendu. (D'autres méthodes sont possibles.)

$$\begin{array}{rl|rl}
 & & 86 &= 86 \times 1 + 31 \times 0 \\
 & & 31 &= 86 \times 0 + 31 \times 1 \\
86 &= 31 \times 2 + 24 & 24 &= 86 \times 1 + 31 \times (-2) \\
31 &= 24 \times 1 + 7 & 7 &= 86 \times (-1) + 31 \times 3 \\
24 &= 7 \times 3 + 3 & 3 &= 86 \times 4 + 31 \times (-11) \\
7 &= 3 \times 2 + 1 & \mathbf{1} &= \mathbf{86} \times (-\mathbf{9}) + \mathbf{31} \times \mathbf{25} \\
3 &= 1 \times 3 + \mathbf{0}. & &
\end{array}$$

Le couple $(u, v) = (-9, 25)$ vérifie donc $86u + 31v = 1$.

Exercice 3

Soit n un entier naturel. Pour tout entier p compris entre 0 et n, on note $\binom{n}{p}$ le nombre de combinaisons (coefficient binomial) de p éléments parmi n (que l'on note aussi C_n^p).

Question 1

Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(2\theta) = \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 = 2\cos(\theta)^2 - 1.$$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\cos(2\theta) &= \operatorname{Re} e^{2i\theta} \\
&= \operatorname{Re}\left((e^{i\theta})^2\right) \\
&= \operatorname{Re}\left((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^2\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\cos(\theta)^2 + 2i\cos(\theta)\sin(\theta) - \sin(\theta)^2\right) \\
&= \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 \\
&= 2\cos(\theta)^2 - 1 \qquad \text{car } \sin(\theta)^2 = 1 - \cos(\theta)^2.
\end{aligned}$$

Question 2

Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(3\theta) = \cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta)\sin(\theta)^2 = 4\cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta).$$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta) &= \operatorname{Re} e^{3i\theta} \\
&= \operatorname{Re}\left((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\cos(\theta)^3 + 3i\cos(\theta)^2\sin(\theta) - 3\cos(\theta)\sin(\theta)^2 - i\sin(\theta)^3\right) \\
&= \cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta)\sin(\theta)^2 \\
&= 4\cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta) \qquad \text{car } \sin(\theta)^2 = 1 - \cos(\theta)^2.
\end{aligned}$$

Question 3

Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos(\theta)^{n-2k}\sin(\theta)^{2k}, \qquad \text{avec } m = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\cos(n\theta) &= \operatorname{Re}\left((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \cos(\theta)^{n-\ell}(i\sin(\theta))^\ell\right) \\
&\qquad \text{en développant à l'aide de la formule du binôme.}
\end{aligned}$$

On sépare maintenant la somme en deux parties, selon que l'indice ℓ est pair ($\ell = 2k$) ou impair ($\ell = 2k+1$) :

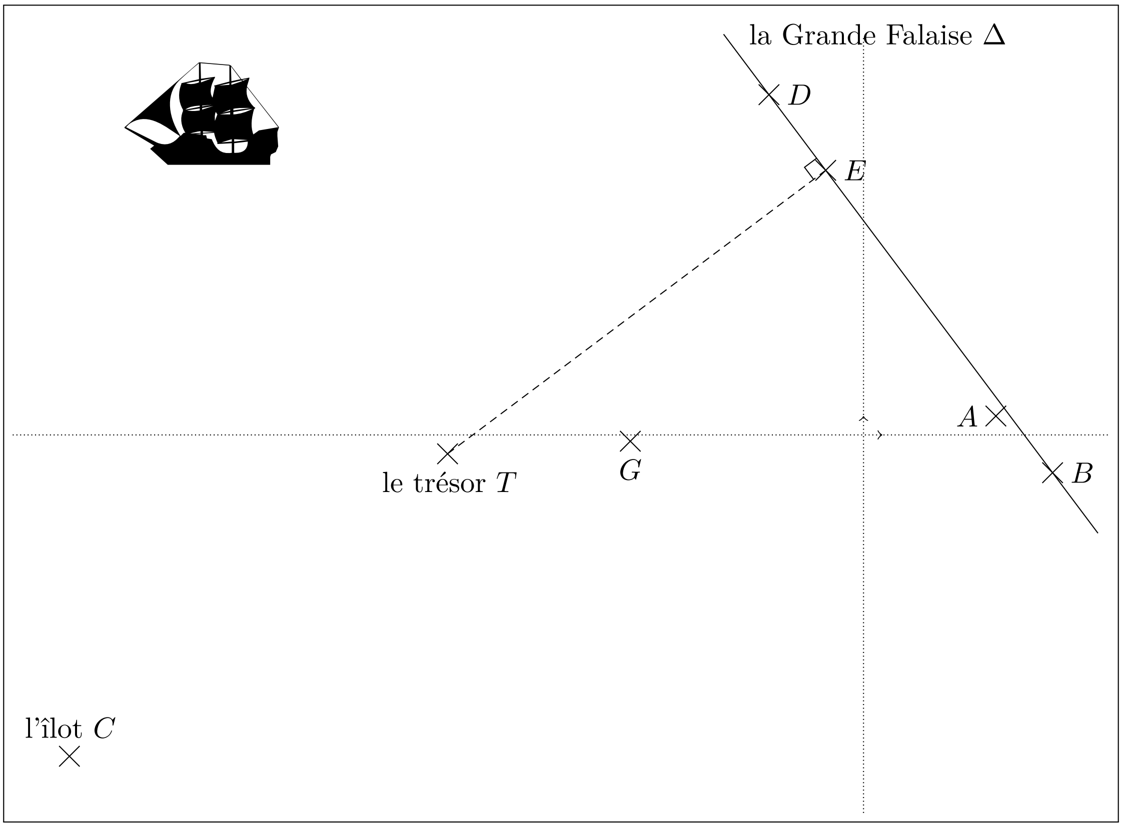
$$\begin{aligned}
\cos(n\theta) = \operatorname{Re}\Bigg(&\left(\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{2k} (-1)^k \cos(\theta)^{n-2k}\sin(\theta)^{2k}\right) \\
&+ \left(\sum_{k=0}^{m'} \binom{n}{2k+1} i(-1)^k \cos(\theta)^{n-2k-1}\sin(\theta)^{2k+1}\right)\Bigg) \\
&\text{avec } m = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \text{ et } m' = \begin{cases} \frac{n-2}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \\
= \sum_{k=0}^{m} &\binom{n}{2k} (-1)^k \cos(\theta)^{n-2k}\sin(\theta)^{2k}.
\end{aligned}$$

Exercice 4

Matham le rose, pirate-mathématicien, a laissé la carte au trésor suivante :

Notons A le récif de Fermat, d'affixe $7 + i$.
Notons B l'entrée Est des cavernes, d'affixe $10 - 2i$, sur la Grande Falaise.
Notons C l'îlot artificiel, d'affixe $-42 - 17i$.
Enfin, notons D la trace de naufrage sur la Grande Falaise, d'affixe $-5 + 18i$.
Soit f l'application qui au point M associe le translaté de A par le vecteur $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{DM}$.
Le trésor est au centre de f.

On notera que le monde de Matham le rose est parfaitement plat et peut être identifié au plan affine euclidien de la géométrie usuelle. Il est recommandé de faire une figure.



Question 1

Notons G le barycentre de $(B, 1)$, $(C, 1)$ et $(D, 1)$. Quelle est son affixe ?

Notons O l'origine de repère utilisé, c'est-à-dire le point d'affixe 0. On a alors

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right).$$

Pour tout point P, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OP}$ est égale à l'affixe du point P (puisque O a pour affixe 0). Le point G a donc pour affixe

$$\frac{1}{3}\left((10 - 2i) + (-42 - 17i) + (-5 + 18i)\right) = \frac{-37 - i}{3}.$$

Question 2

Déterminer les affixes des points $f(A)$ et $f(B)$.

Soit M un point d'affixe $z \in \mathbb{C}$. Le point $f(M)$ est alors le translaté du point A par le vecteur $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{DM}$. Or, le vecteur $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{DM}$ a pour affixe

$$(z - (10 - 2i)) + (z - (-42 - 17i)) + (z - (-5 + 18i)) = 3z + 37 + i,$$

donc le point $f(M)$ a pour affixe

$$(7 + i) + (3z + 37 + i) = 3z + 44 + 2i.$$

En particulier, le point $f(A)$ a pour affixe

$$3(7 + i) + 44 + 2i = 65 + 5i$$

et le point $f(B)$ a pour affixe

$$3(10 - 2i) + 44 + 2i = 74 - 4i.$$

Question 3

Soit M un point du plan. Déterminer une expression de $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ en fonction de $\overrightarrow{MG}$.

On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} &= 3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} \qquad \text{par relation de Chasles} \\ &= 3\overrightarrow{MG} \qquad \text{par définition de } G.\end{aligned}$$

Question 4

Expliciter l'application de $\mathbb{C}$ dans lui-même correspondant à f.

C'est l'application

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & 3z + 44 + 2i, \end{array}\right.$$

comme démontré en réponse à la question 2.

Question 5

Quelle est la nature de f ? Quels sont ses éléments caractéristiques ?

L'application trouvée à la question précédente est de la forme $z \mapsto az + b$, avec a réel (et $b \in \mathbb{C}$). L'application f est donc une homothétie ou une translation. De plus, $a \neq 1$, donc ce n'est pas une translation. Donc f est une homothétie. Son rapport est $a = 3$.

Pour trouver le centre de l'homothétie f, on cherche son point fixe. Soit M un point d'affixe $z \in \mathbb{C}$. On a alors :

$$\begin{aligned} f(M) = M &\iff 3z + 44 + 2i = z \\ &\iff 2z + 44 + 2i = 0 \\ &\iff 2z = -44 - 2i \\ &\iff z = -22 - i, \end{aligned}$$

donc on trouve un unique point fixe, d'affixe $-22 - i$. Le centre de l'homothétie f est donc le point d'affixe $-22 - i$.

Question 6

Quelle est l'affixe du trésor de Matham le rose ?

Le trésor se trouve au centre de l'homothétie f, donc son affixe est $-22 - i$ d'après la question précédente.

Question 7

La Grande Falaise est parfaitement rectiligne et infinie. C'est donc une droite Δ passant par les points B et D. Déterminer une description paramétrique de la droite Δ.

Comme B et D sont deux point distincts, la droite $\Delta = (BD)$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{BD}$ et passe par le point B. Le point B a pour affixe $10 - 2i$, et le vecteur $\overrightarrow{BD}$ a pour affixe

$$(-5 + 18i) - (10 - 2i) = -15 + 20i,$$

donc la droite Δ est l'ensemble des points d'affixe

$$(-15 + 20i)t + (10 - 2i), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Question 8

Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ.

Soit M un point de coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a alors

$$\begin{aligned}
M \in \Delta &\iff \exists t \in \mathbb{R} \quad x + iy = (-15 + 20i)t + (10 - 2i) \\
&\qquad\qquad\quad \text{d'après la question précédente} \\
&\iff \exists t \in \mathbb{R} \quad x = -15t + 10 \wedge y = 20t - 2 \\
&\iff \exists t \in \mathbb{R} \quad t = \frac{10 - x}{15} = \frac{y + 2}{20} \\
&\iff \frac{10 - x}{15} = \frac{y + 2}{20} \\
&\iff 4(10 - x) = 3(y + 2) \\
&\iff 4x + 3y - 34 = 0,
\end{aligned}$$

donc une équation cartésienne de la droite Δ est $4x + 3y - 34 = 0$.

Question 9

Notons E le projeté orthogonal de l'emplacement T du trésor sur la droite Δ, c'est-à-dire l'unique point $E \in \Delta$ tel que $(TE) \perp \Delta$. Montrer que $\overrightarrow{TE} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

Comme T a pour coordonnées $(-22, -1)$ d'après la question 6, et

$$4 \times (-22) + 3 \times (-1) - 34 = -125 \neq 0,$$

le point T n'appartient pas à la droite Δ, or $E \in \Delta$, donc $T \neq E$, donc la droite (TE) est bien définie, et $\overrightarrow{TE}$ est un vecteur directeur de (TE). D'autre part, $\overrightarrow{BD}$ est un vecteur directeur de la droite Δ (cf. question 7). Comme $(TE) \perp \Delta$, les vecteurs $\overrightarrow{TE}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux (par définition de l'orthogonalité de deux droites), c'est-à-dire $\overrightarrow{TE} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ (par définition de l'orthogonalité de deux vecteurs).

Question 10

Déterminer les coordonnées du point E. (Indication : on pourra utiliser une description paramétrique de la droite Δ ainsi que l'égalité obtenue à la question précédente.)

Comme $E \in \Delta$, il existe, d'après la question 7, un réel t_0 tel que E ait pour affixe

$$(-15+20i)t_0 + (10-2i).$$

(Notons que c'est l'affixe du translaté du point B par le vecteur $t_0\,\overrightarrow{BD}$, d'après la réponse à la question 7.) Le vecteur $\overrightarrow{TE}$ a alors pour affixe

$$(-15+20i)t_0 + (10-2i) - (-22-i) = (-15+20i)t_0 + (32-i) = (-15t_0+32) + (20t_0-1)$$

D'autre part, le vecteur $\overrightarrow{BD}$ a pour affixe $-15+20i$ (cf. question 7). On a alors :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{TE}\cdot\overrightarrow{BD} = 0 &\iff -15(-15t_0+32) + 20(20t_0-1) = 0\\
&\iff -3(-15t_0+32) + 4(20t_0-1) = 0\\
&\iff 45t_0 - 96 + 80t_0 - 4 = 0\\
&\iff 125t_0 - 100 = 0\\
&\iff 5t_0 - 4 = 0\\
&\iff t_0 = \frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

Le point E a donc pour affixe

$$(-15+20i)\frac{4}{5} + (10-2i) = -12+16i+10-2i = -2+14i.$$

Le point E a donc pour coordonnées $(-2, 14)$.

Question 11

Calculer la distance du trésor à la Grand Falaise, c'est-à-dire la longueur TE.

D'après les questions 6 et 10, les points T et E ont pour affixes respectives $-22-i$ et $-2+14i$, donc

$$TE = |(-2+14i) - (-22-i)| = |20+15i| = 5|4+3i| = 5\sqrt{4^2+3^2} = 25.$$

Question 12

Décrire E comme un barycentre des points B et D, dont on déterminera des coefficients.

D'après la réponse à la question 10, le point E est le translaté du point B par le vecteur $t_0\,\overrightarrow{BD}$ pour $t_0 = \frac{4}{5}$. On a donc

$$\overrightarrow{BE} = \frac{4}{5}\overrightarrow{BD},$$

donc $-5\overrightarrow{EB} = 4\overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{ED} - 4\overrightarrow{EB}$, donc

$$\overrightarrow{EB} + 4\overrightarrow{ED} = \vec{0},$$

donc le point E est le barycentre de $(B, 1)$ et $(D, 4)$.

Exercice 4

Pour $n \geqslant 0$, entier, on note $\mathcal{D}(n)$ la propriété :

$$n \mid (2^n + 1).$$

On veut montrer qu'il existe une infinité d'entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $\mathcal{D}(n)$ est vraie.

Aucun résultat sur les congruences ne sera supposé connu. L'utilisation de congruences n'est pas nécessaire pour résoudre l'exercice. Si vous souhaitez néanmoins vous en servir, *toutes* les propriétés utilisées devront être *redémontrées*.

Question 1

Les propriétés $\mathcal{D}(0)$, $\mathcal{D}(1)$, $\mathcal{D}(2)$, $\mathcal{D}(3)$ sont-elles vraies ou fausses ?

- On a $2^0 + 1 = 2$, qui n'est pas multiple de 0 (puisque le seul entier multiple de 0 est 0), donc $\mathcal{D}(0)$ est fausse.
- On a $2^1 + 1 = 3 = 3 \times 1$, donc $\mathcal{D}(1)$ est vraie.
- On a $2^2 + 1 = 5$, or 5 est impair, donc $\mathcal{D}(2)$ est fausse.
- On a $2^3 + 1 = 9 = 3 \times 3$, donc $\mathcal{D}(3)$ est vraie.

Question 2

Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, le nombre $4^n - 1$ est multiple de 3. (Indication : écrire $4 = 3 + 1$ et utiliser la formule du binôme.)

Soit n un entier naturel non nul. On a :

$$\begin{aligned}
4^n - 1 &= (3+1)^n - 1 \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k 1^{n-k} \right) - 1 \qquad \text{d'après la formule du binôme} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k \\
&= 3 \times \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1}}_{\in \mathbb{Z}},
\end{aligned}$$

donc $4^n - 1$ est multiple de 3.

Question 3

Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :

$$2^{3n} + 1 = (2^n + 1)(4^n - 2^n + 1).$$

Soit n un entier naturel. On a :

$$\begin{aligned}
(2^n + 1)(4^n - 2^n + 1) &= (2^n + 1)(2^{2n} - 2^n + 1) \\
&= 2^{3n} - 2^{2n} + 2^n + 2^{2n} - 2^n + 1 \qquad \text{en développant} \\
&= 2^{3n} + 1.
\end{aligned}$$

Question 4

Soit k un entier naturel non nul. Supposons, dans cette question, que $\mathcal{D}(3^k)$ est vraie. Montrer que le nombre

$$4^{3^k} - 2^{3^k} + 1 = (4^{3^k} - 1) - (2^{3^k} + 1) + 3$$

est multiple de 3. (Rappelons que 4^{3^k} est synonyme de $4^{(3^k)}$ et n'est en général pas égal à $(4^3)^k = 4^{3k}$.)

- D'après la question 2, $4^{3^k} - 1$ est multiple de 3
- Comme $\mathcal{D}(3^k)$ est vraie, $2^{3^k} + 1$ est multiple de 3^k, donc de 3 puisque $k \geqslant 1$.
- Bien sûr, 3 est multiple de 3.

La somme de ces trois entiers est donc multiple de 3, donc $4^{3^k} - 2^{3^k} + 1$ est multiple de 3.

Question 5

Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, la propriété $\mathcal{D}(3^k)$ est vraie. Conclure.

On procède par récurrence.

- D'après la question 1, la propriété $\mathcal{D}(3^1)$ est vraie.
- Soit k un entier naturel non nul. Supposons que $\mathcal{D}(3^k)$ est vraie. D'après la question 3, on a :

  $$2^{3^{n+1}} + 1 = (2^{3^n} + 1)(4^{3^n} - 2^{3^n} + 1),$$

  or $2^{3^n} + 1$ est multiple de 3^n par hypothèse de récurrence, et $4^{3^n} - 2^{3^n} + 1$ est multiple de 3 d'après la question 4, donc $2^{3^{n+1}} + 1$ est multiple de 3^{n+1}, i.e. $\mathcal{D}(3^{k+1})$ est vraie.

La propriété $\mathcal{D}(3^k)$ est donc vraie pour tous les entiers $k \geqslant 1$. Or l'application

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ k & \longmapsto & 3^k \end{array} \right.$$

est strictement croissante, donc injective, donc il existe une infinité d'entiers de la forme 3^k, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Il y a donc une infinité d'entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $\mathcal{D}(n)$ est vraie.