UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Algèbre et géométrie 1

Examen (session 1)

Durée de l'examen : 2h.

La consultation de document n'est pas autorisée. L'utilisation de calculatrices, de téléphones portables, tablettes ou ordinateurs n'est pas autorisée.

Sauf mention explicite du contraire, toutes vos réponses doivent être accompagnées d'une démonstration justifiant la réponse. La notation tiendra compte de la qualité des raisonnements ainsi que du soin apporté à la rédaction et la présentation.

Exercice 1

Définir le barycentre de deux points pondérés. (Les notations employées doivent être soigneusement expliquées. Aucune démonstration n'est demandée.)

Exercice 2

Déterminer un couple d'entiers $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $86u + 31v = 1$. (Les calculs effectués doivent être inclus dans la réponse.)

Exercice 3

Soit n un entier naturel. Pour tout entier p compris entre 0 et n, on note $\binom{n}{p}$ le nombre de combinaisons (coefficient binomial) de p éléments parmi n (que l'on note aussi C_n^p).

1. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :
$$\cos(2\theta) = \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 = 2\cos(\theta)^2 - 1.$$
2. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :
$$\cos(3\theta) = \cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta)\sin(\theta)^2 = 4\cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta).$$
3. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :
$$\cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos(\theta)^{n-2k} \sin(\theta)^{2k}, \qquad \text{avec } m = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Exercice 4

Matham le rose, pirate-mathématicien, a laissé la carte au trésor suivante :

> Notons A le récif de Fermat, d'affixe $7 + i$.
> Notons B l'entrée Est des cavernes, d'affixe $10 - 2i$, sur la Grande Falaise.
> Notons C l'îlot artificiel, d'affixe $-42 - 17i$.
> Enfin, notons D la trace de naufrage sur la Grande Falaise, d'affixe $-5 + 18i$.
> Soit f l'application qui au point M associe le translaté de A par le vecteur $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{DM}$.
> Le trésor est au centre de f.

On notera que le monde de Matham le rose est parfaitement plat et peut être identifié au plan affine euclidien de la géométrie usuelle. Il est recommandé de faire une figure.

1. Notons G le barycentre de $(B, 1)$, $(C, 1)$ et $(D, 1)$. Quelle est son affixe ?
2. Déterminer les affixes des points $f(A)$ et $f(B)$.
3. Soit M un point du plan. Déterminer une expression de $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ en fonction de $\overrightarrow{MG}$.
4. Expliciter l'application de $\mathbb{C}$ dans lui-même correspondant à f.
5. Quelle est la nature de f ? Quels sont ses éléments caractéristiques ?
6. Quelle est l'affixe du trésor de Matham le rose ?
7. La Grande Falaise est parfaitement rectiligne et infinie. C'est donc une droite Δ passant par les points B et D. Déterminer une description paramétrique de la droite Δ.
8. Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ.
9. Notons E le projeté orthogonal de l'emplacement T du trésor sur la droite Δ, c'est-à-dire l'unique point $E \in \Delta$ tel que $(TE) \perp \Delta$. Montrer que $\overrightarrow{TE} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.
10. Déterminer les coordonnées du point E. (Indication : on pourra utiliser une description paramétrique de la droite Δ ainsi que l'égalité obtenue à la question précédente.)
11. Calculer la distance du trésor à la Grand Falaise, c'est-à-dire la longueur TE.
12. Décrire E comme un barycentre des points B et D, dont on déterminera des coefficients.

Exercice 5

Pour $n \geqslant 0$, entier, on note $\mathcal{D}(n)$ la propriété :

$$n \mid (2^n + 1).$$

On veut montrer qu'il existe une infinité d'entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $\mathcal{D}(n)$ est vraie.

Aucun résultat sur les congruences ne sera supposé connu. L'utilisation de congruences n'est pas nécessaire pour résoudre l'exercice. Si vous souhaitez néanmoins vous en servir, *toutes* les propriétés utilisées devront être *redémontrées*.

1. Les propriétés $\mathcal{D}(0)$, $\mathcal{D}(1)$, $\mathcal{D}(2)$, $\mathcal{D}(3)$ sont-elles vraies ou fausses ?
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, le nombre $4^n - 1$ est multiple de 3. (Indication : écrire $4 = 3 + 1$ et utiliser la formule du binôme.)
3. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :

$$2^{3n} + 1 = (2^n + 1)(4^n - 2^n + 1).$$

4. Soit k un entier naturel non nul. Supposons, dans cette question, que $\mathcal{D}(3^k)$ est vraie. Montrer que le nombre

$$4^{3^k} - 2^{3^k} + 1 = (4^{3^k} - 1) - (2^{3^k} + 1) + 3$$

   est multiple de 3. (Rappelons que 4^{3^k} est synonyme de $4^{(3^k)}$ et n'est en général pas égal à $(4^3)^k = 4^{3k}$.)
5. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, la propriété $\mathcal{D}(3^k)$ est vraie. Conclure.