

Formulaire de logique

1 Notations

On note ici :

- \neg l'opérateur logique « **non** » ;
- \vee l'opérateur logique « **ou** » (inclusif) ;
- \wedge l'opérateur logique « **et** » ;
- \Rightarrow l'opérateur logique « **implique** » ;
- \Leftrightarrow l'opérateur logique « **est équivalent à** » (c'est-à-dire l'égalité des formules logiques) ;
- \top la valeur « *vrai* » ;
- \perp la valeur « *faux* ».

(D'autres conventions de notations existent !)

Les tables de vérité correspondantes sont :

A	$\neg A$
\top	\perp
\perp	\top

A	B	$A \vee B$
\top	\top	\top
\top	\perp	\top
\perp	\top	\top
\perp	\perp	\perp

A	B	$A \wedge B$
\top	\top	\top
\top	\perp	\perp
\perp	\top	\perp
\perp	\perp	\perp

A	B	$A \Rightarrow B$
\top	\top	\top
\top	\perp	\perp
\perp	\top	\top
\perp	\perp	\top

A	B	$A \Leftrightarrow B$
\top	\top	\top
\top	\perp	\perp
\perp	\top	\perp
\perp	\perp	\top

En l'absence de parenthèses, \neg est plus prioritaire que \vee et \wedge , qui sont eux-même plus prioritaires que \Rightarrow et \Leftrightarrow . Par exemple,

$$\neg A \vee B \Rightarrow C \wedge D$$

signifie

$$((\neg A) \vee B) \Rightarrow (C \wedge D).$$

2 Formulaire

Dans ce qui suit, les lettres A, B, C, \dots désignent des variables qui peuvent prendre les valeurs *vrai* (\top) ou *faux* (\perp), ou être remplacées par des formules logiques.

Les formules suivantes sont des *tautologies*. Autrement dit, elles sont toujours vraies, quelles que soient les valeurs des variables, pour des raisons venant seulement de la définition des opérateurs logiques qui les constituent.

- \top
- $\neg \perp$
- principe du tiers exclu : $A \vee \neg A$
- involutivité de \neg : $\neg \neg A \Leftrightarrow A$
- associativité de \vee : $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$
- commutativité de \vee : $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$
- idempotence de \vee : $A \vee A \Leftrightarrow A$
- associativité de \wedge : $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$
- commutativité de \wedge : $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
- idempotence de \wedge : $A \wedge A \Leftrightarrow A$
- distributivité de \vee par rapport à \wedge : $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- distributivité de \wedge par rapport à \vee : $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- loi d'absorption : $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$
- loi d'absorption : $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$
- élément neutre pour \vee : $A \vee \perp \Leftrightarrow A$
- élément neutre pour \wedge : $A \wedge \top \Leftrightarrow A$
- élément absorbant pour \vee : $A \vee \top$
- élément absorbant pour \wedge : $\neg(A \wedge \perp)$
- loi de De Morgan : $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
- loi de De Morgan : $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
- règle du consensus : $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C) \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C)$
- $A \Rightarrow A$
- $A \Leftrightarrow A$
- $(A \Leftrightarrow \top) \Leftrightarrow A$
- $(A \Leftrightarrow \perp) \Leftrightarrow \neg A$
- symétrie de \Leftrightarrow : $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow A)$
- règle d'inférence : $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$
- principe de contraposition : $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
- $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$
- double implication : $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$
- démonstration par l'absurde : $(\neg A \Rightarrow \perp) \Leftrightarrow A$