septembre 2026

Cours de M2 : Géométrie algébrique et arithmétique

1er cours : 2026-09-09

bibliographie :

Eléments de géométrie algébrique
R. Hartshorne, Algebraic Geometry
I. R. Shafarevich, Basic Algebraic Geometry
D. Perrin, Géométrie algébrique
D. Mumford, The Red Book of Varieties and Schemes LNM 1358

F. Loeser, cours de géométrie algébrique, Paris 6, 1999
J. Oesterlé, cours de géométrie algébrique, Paris 6, 2003

réfs algèbre commutative :

Atiyah & Macdonald, Introduction to Commutative Algebra
Eisenbud, Commutative Algebra with a View towards Algebraic Geometry
A. Chambert-Loir, Algèbre commutative et introduction à la géométrie algébrique (notes de cours)

C. Mourougane, cours ACGA 2025-2026

autres références :

T. Leinster, Basic Category Theory
Cassels & Fröhlich, Algebraic Number Theory

I - Introduction

géométrie algébrique = étude des courbes / surfaces / etc définies par une ou plusieurs équations polynomiales (à plusieurs variables !)

description d'objets géométriques avec des coordonnées (Descartes)
développement rapide au début du XXe siècle avec l'école italienne (Castelnuovo, Severi, etc) mais crise de la rigueur
refondement (Zariski, Weil, etc)
conduit à l'introduction du langage des schémas (Grothendieck, Serre, etc)
→ langage abstrait mais très général
qui conduit à une multitude d'applications
(par ex. en théorie des nombres : l'étude des courbes rejoint l'étude des anneaux de Dedekind)

Quelques remarques sur les courbes algébriques

Considérons une courbe algébrique affine plane, donnée par une équation $P(X,Y) = 0$ $\quad P \in k[X,Y]$
On regarde ici la courbe comme ensemble de points (dans k^2).
Si P n'est pas irréductible, la courbe est réunion de courbes avec P irréductible. Ces courbes peuvent avoir des propriétés différentes : $\underbrace{(X^2+Y^2)}_{\text{point}}\underbrace{(X+Y+1)}_{\text{droite}} \in \mathbb{R}[X]$.
On peut vouloir imposer que P soit irréductible.

Considérons les cercles : $X^2 + Y^2 - r \in \mathbb{R}[X]$

$r > 0$ cercle

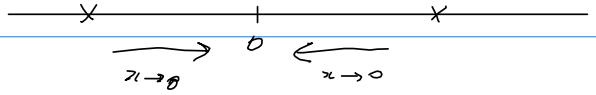
$r = 0$ point !

$r < 0$ $\emptyset$!!! Est-ce un cercle ?

$X^4 + Y^4 + 1 = 0$ donne aussi $\emptyset$. Est-ce un cercle ?

Pour éviter cela, on peut imposer que k soit alg. clos (donc pas $\mathbb{R}$).

Ce n'est pas complètement satisfaisant : $X^2 + Y^2 - r$ donne une famille de « cercles », sauf pour $r = 0$, où le polynôme cesse d'être irréductible. On voudrait un cercle de rayon 0 ! Mais est-ce la même chose qu'un point ? Si l'on intersecte avec la droite $Y = 0$, on se rend compte qu'on voudrait un point « double »



solution de $X^2 = 0$ plutôt que de $X = 0$. Comment les distinguer ?

On peut regarder l'anneau des polynômes restreint à l'ensemble d'équation $P = 0$.

C'est $k[X,Y]/(P)$.

↳ si k est infini, pour pouvoir identifier polynômes et fonctions polynômes.

En dimension 1, $k[X]/(X) \simeq k$

$k[X]/(X^2)$ k-algèbre de dimension 2, avec des nilpotents.

→ On voit une différence !

Ensembles algébriques et Nullstellensatz

Soit k un corps. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de $k[X_0, \dots, X_{n-1}]$.
On note :

$$V(\mathfrak{a}) := \{ (x_0, \dots, x_{n-1}) \in k^n \mid \forall P \in \mathfrak{a} \; P(x_0, \dots, x_{n-1}) = 0 \}.$$

Soit Z une partie de k^n. On note

$$I(Z) := \{ P \in k[X_0, \dots, X_{n-1}] \mid \forall (x_0, \dots, x_{n-1}) \in Z \; P(x_0, \dots, x_{n-1}) = 0 \}$$

Un ensemble de la forme $V(\mathfrak{a})$ est appelé un ensemble algébrique

Prop :

(facile)

- Les applications V et I sont décroissantes (pour $\subseteq$).
- $I\left(\bigcup_{j \in J} Z_j\right) = \bigcap_{j \in J} I(Z_j)$, $V\left(\sum_{j \in J} \mathfrak{a}_j\right) = \bigcap_{j \in J} V(\mathfrak{a}_j)$
- $\forall \mathfrak{a} \quad \mathfrak{a} \subseteq I(V(\mathfrak{a}))$
- $\forall Z \quad Z \subseteq V(I(Z))$
- $\forall \mathfrak{a} \quad V(\mathfrak{a}) = V(I(V(\mathfrak{a})))$
- $\forall Z \quad I(Z) = I(V(I(Z)))$
- $V(k[X_0, \dots, X_{n-1}]) = \emptyset$, $V((0)) = k^n$
- $I(k^n) = (0)$ si k est infini, $I(\emptyset) = k[X_0, \dots, X_{n-1}]$.
- $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{a}') = V(\mathfrak{a}\mathfrak{a}')$

Rem : . Cela fait des ensembles algébriques les fermés d'une topologie (topologie de Zariski)

. On voudrait savoir quels sont les idéaux $I(Z)$, en bijection avec les ensembles algébriques. (On voudrait avoir $\mathfrak{a} = I(V(\mathfrak{a}))$, mais ça ne fonctionne pas, cf. les remarques précédentes.)

Exercice : Quels sont les ensembles algébriques de k ?

— théorème des zéros de Hilbert

Th (Hilbert, Nullstellensatz) :
Soient k un corps et A une k-algèbre de type fini.
Si A est un corps, alors A est une extension finie de k.

↳ i.e. $A = k[x_0, \dots, x_{n-1}]$ ($x_0, \dots, x_{n-1} \in A$ finie !)

Preuve : cf Atiyah-Macdonald (ou autre livre d'algèbre commutative)

Rem : C'est une généralisation de : $k(x)$ est un corps ssi x est algébrique sur k.

Corollaire : Si k est algébriquement clos et si m est un idéal maximal d'une k-algèbre de type fini A, alors $A/m \simeq k$.

$A/m \simeq k$ est canonique car de sorte de k-ev de dim 1, et $1 \mapsto 1$.

□ A/m est un corps et une k-alg de type fini. ■

Corollaire : Si k est algébriquement clos, les idéaux maximaux de $k[X_0, \dots, X_{n-1}]$ sont de la forme $(X_0 - a_0, \dots, X_{n-1} - a_{n-1})$ avec $a_0, \dots, a_{n-1} \in k$.

□ $\Leftarrow$: $P(X_0, \dots, X_{n-1}) \equiv P(a_0, \dots, a_{n-1}) \bmod (X_0 - a_0, \dots, X_{n-1} - a_{n-1})$ par divisions euclidiennes

$\Rightarrow$: Si m est un idéal maximal, alors de $A = k[X_0, \dots, X_{n-1}]$

$$A \twoheadrightarrow A/m \simeq k$$
$$X_i \longmapsto a_i$$

et $X_i - a_i \in m$ donc $(X_0 - a_0, \dots, X_{n-1} - a_{n-1}) \subseteq m$

(idéaux maximaux) ■

Corollaire : Si k est algébriquement clos et si I est un idéal de $A = k[X_0, \dots, X_{n-1}]$, alors $V(I) = \emptyset \iff I = A$.

□ Si $I \neq A$, soit m un idéal maximal avec $I \subseteq m$ ($\subsetneq A$).
On a $m = (X_0 - a_0, \dots, X_{n-1} - a_{n-1})$
$V(I) \supseteq V(m) = \{(a_0, \dots, a_{n-1})\}$ donc $V(I) \neq \emptyset$. ☒

Corollaire : Si k est algébriquement clos et si $\mathfrak{A}$ est un idéal de $k[X_0, \dots, X_{n-1}]$, alors $I(V(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$.

$\left(\sqrt{\mathfrak{a}} := \{P \in A \;/\; \exists r \geq 1 \quad P^r \in \mathfrak{a}\}\right)$

□ $\supseteq$: Si $P \in \sqrt{\mathfrak{a}}$, alors $\exists r \geq 1$ $P^r \in \mathfrak{a}$,
donc $P^r \in I(V(\mathfrak{a}))$, d'où $P \in I(V(\mathfrak{a}))$
car k est intègre.

$\subseteq$: Soit $P \in I(V(\mathfrak{a}))$.
Comme $k[X_0, \dots, X_{n-1}]$ est noethérien, on a
$\mathfrak{a} = (P_0, \dots, P_{m-1})$.
On considère l'idéal
$(P_0, \dots, P_{m-1}, 1 - TP)$ de $k[X_0, \dots, X_{n-1}, T]$.
On a $V(P_0, \dots, P_{m-1}, 1-TP) = \emptyset$,
donc $(P_0, \dots, P_{m-1}, 1-TP) = (1)$ par le corollaire précédent, i.e.
$\exists Q_0, \dots, Q_m \in k[X_0, \dots, X_{n-1}, T]$
$$\sum_{i=0}^{m-1} P_i Q_i + (1 - TP) Q_m = 1$$
En évaluant en $T = \frac{1}{P}$, on trouve donc $k(X_0, \dots, X_{n-1})\left[\frac{1}{P}\right]$:
$$\sum_{i=0}^{m-1} P_i(X_0, \dots, X_{n-1}) \, Q_i\left(X_0, \dots, X_{n-1}, \frac{1}{P}\right) = 1$$
En multipliant par P^k avec $k \geq$ degré de T dans tous les Q_i,
on en déduit $P^k \in (P_0, \dots, P_{m-1}) = \mathfrak{a}$, donc $P \in \sqrt{\mathfrak{a}}$. ☒

fin du cours n°1 (2026-09-09)

Exercice : Trouver des contre-exemples à ces corollaires dans le cas où k n'est pas algébriquement clos.

Rem :
- Les points de k^n correspondent aux idéaux maximaux de $k[X_0, \dots, X_{n-1}]$, si k est alg. clos.
- Si m idéal max, k alg clos, alors
$$\underbrace{V(m)}_{\text{singleton}} \subseteq V(\alpha) \iff \alpha \in m$$
- Les idéaux premiers correspondent aux ensembles algébriques irréductibles de k^n (tjrs avec k alg. clos)

(i.e. pas réunion de deux fermés stricts)

□ Si $V(\alpha)$ est réductible, on aurait
$$\begin{cases} \sqrt{\alpha} \subsetneq \alpha' \\ \sqrt{\alpha} \subsetneq \alpha'' \\ V(\alpha'\alpha'') = V(\alpha) \end{cases}$$
Soient $f \in \alpha' \setminus \sqrt{\alpha}$, $g \in \alpha'' \setminus \sqrt{\alpha}$. On peut supposer $\begin{cases} \alpha' = (\alpha, f) \\ \alpha'' = (\alpha, g) \end{cases}$
La 3e condition devient $fg \in \sqrt{\alpha}$.
On en déduit que $\sqrt{\alpha}$ n'est pas premier, donc α non plus.

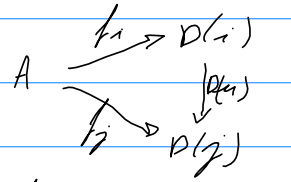
(**Exercice :** si p idéal premier, alors $\sqrt{p} = p$.)

Réciproquement : même méthode, en exercice ∎

ajout 2026-09-15 : Limites inductives, limites projectives
(compléments d'algèbre commutative)

biblio : Lang, Algebra
Eisenbud (appendice 6)
Leinster, Basic Category Theory (chap 5)

Def : $\mathcal{A}$ est une catégorie
I une petite catégorie,
un *diagramme* dans $\mathcal{A}$ (de schéma I) est
un foncteur $I \to \mathcal{A}$.
Si $D : I \to \mathcal{A}$ est un diagramme,
un *cône* sur D est un objet $A \in \mathcal{A}$ et des
flèches $(f_i : A \to D(i))_{i \in I}$ dans $\mathcal{A}$
tels que pour toute flèche $u : i \to j$ de I
le diagramme



commute
Une *limite* de D est un cône $(L \xrightarrow{\pi_i} D(i))_{i \in I}$
tel que pour tout cône $(A \xrightarrow{f_i} D(i))_{i \in I}$ de D
il existe une unique flèche $f : A \to L$ dans $\mathcal{A}$
telle que $f_i = \pi_i \circ f$ pour tout $i \in I$.

On parle aussi de limite projective ou de limite inverse.
Une colimite, ou limite inductive, est une limite dans
la catégorie opposée (i.e. on renverse le sens des flèches
dans la définition).

Existence (cas des modules sur un anneau A)

Limites projectives Ici, $\mathcal{A}$ est la catégorie des A-modules.

(Une preuve analogue fonctionne dans la catégorie des anneaux.)

On pose $L := \left\{ (a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} D(i) \;\middle/\; \forall (i \xrightarrow{u} j) \in I \quad D(u)(a_i) = a_j \right\}$

$$\left.\begin{array}{rcl} p_i : L & \longrightarrow & D(i) \\ (a_i)_{i\in I} & \longmapsto & a_i \end{array}\right.$$

Si C est un autre cône, on définit

$$\left.\begin{array}{rcl} f : C & \longrightarrow & L \\ x & \longmapsto & (f_i(x))_{i\in I} \end{array}\right.$$

↑ C'est bien un élément de L car C est un cône.

Par construction, on a $p_i \circ f = f_i$.

Si $g : C \longrightarrow L$ vérifie $p_i \circ g = f_i$,

alors $\forall i \quad p_i \circ g = p_i \circ f$

donc $g = f$ par définition de L.

Limites inductives

pour simplifier, on renverse aussi les flèches de I ici.

On pose $L' := \left\{ (a_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} D(i) \right\}$ / le sous-module engendré par les $(0, \dots, 0, \underset{\uparrow D(i)}{a_i}, 0, \dots, \underset{\uparrow D(j)}{D(u)(a_i)}, 0, \dots)$ pour tout $(u : i \to j) \in I$.

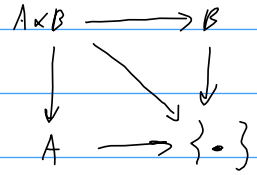
$$\left.\begin{array}{rcl} \iota_i : D(i) & \longrightarrow & L' \\ x & \longmapsto & (0, \dots, 0, \underset{\uparrow D(i)}{x}, 0, \dots, 0) \end{array}\right.$$

Exercice : vérifier la propriété universelle.

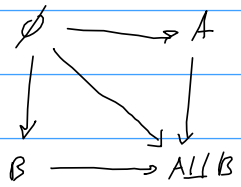
Exemples :

- Les produits cartésiens d'ensembles sont des limites projectives

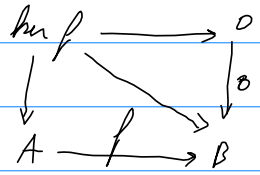
généralisation : produit fibré



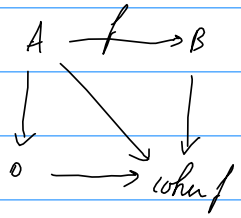
- Les réunions disjointes d'ensembles sont des limites inductives



- Les produits de modules ou d'anneaux sont des limites projectives
- Les sommes directes de modules, les coproduits d'anneaux, sont limites inductives.
- Les noyaux de morphismes de modules ou d'anneaux sont des limites projectives :



- Les conoyaux de morphismes de modules ou d'anneaux sont des limites inductives.



(fin de l'exposé)

II - Schémas

1 - Schémas affines : spectre d'un anneau

Soit A un anneau (commutatif unitaire).
Le spectre (ou parfois spectre premier) de A est
$$\operatorname{Spec} A := \{ \text{idéaux premiers de } A \}.$$

On munit $\operatorname{Spec} A$ d'une topologie, appelée topologie de Zariski. Les fermés de cette topologie sont les
$$V(I) := \{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \ / \ \mathfrak{p} \supseteq I \}, \quad I \text{ idéal de } A.$$

(Exercice : vérifier que c'est bien une topologie.)
$$V\Big(\sum_{j \in J} I_j\Big) = \bigcap_{j \in J} V(I_j)$$
$$V(I \cap I') = V(I) \cup V(I')$$
$$V(A) = \emptyset$$

Remarques :
- $\operatorname{Spec} A = \emptyset$ ssi $A = (0)$ (Zorn)
- Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier, alors :
  $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ est un point de $\operatorname{Spec} A$
  $V(\mathfrak{p}) \ni \mathfrak{p}$ est un fermé contenant $\mathfrak{p}$
  si $V(I) \ni \mathfrak{p}$ alors $\mathfrak{p} \supseteq I$ donc $V(\mathfrak{p}) \subseteq V(I)$
  donc $V(\mathfrak{p})$ est l'adhérence du point $\mathfrak{p}$.
- Les idéaux maximaux correspondent aux points fermés.
- Si A est intègre, alors l'idéal nul est premier et est un point dense dans $\operatorname{Spec} A$. On dit que c'est le point générique. (Il est unique.)

Un pt générique d'une partie Z (fermée) est un pt de Z dont l'adhérence est Z.

- Si k est un corps, alors $\mathrm{Spec}\, k = \{(0)\}$ est l'espace top à un seul point.
- Si A est un anneau de valuation discrète (par ex., le localisé de $\mathbb{Z}$ en un nombre premier p, ou les entiers p-adiques $\mathbb{Z}_p$), alors $\mathrm{Spec}\, A$ a deux points : le point générique (0) et l'unique point fermé. (dense)

Prop : L'espace $\mathrm{Spec}\, A$ est quasi-compact

(i.e. de tout recouvrement ouvert on peut extraire un sous-recouvrement fini.

□ On prend les complémentaires :

$$\bigcap_{i\in I} V(\alpha_i) = \emptyset$$

i.e. $$\sum_{i\in I} \alpha_i = A$$

$$1 = \sum_{i\in I} f_i \qquad f_i \in A \quad \text{presque tous nuls.}$$

$$J := \{ i \in I \mid f_i \neq 0 \} \quad \text{fini}$$

$$1 = \sum_{i\in J} f_i$$

donc $$\sum_{i\in J} \alpha_i = 1$$

$$\bigcap_{i\in J} V(\alpha_i) = \emptyset \qquad \blacksquare$$

On a un foncteur contravariant $\left\{\begin{array}{c}\text{anneaux} \\ \text{commutatifs}\end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{espaces} \\ \text{topologiques}\end{array}\right\}$:

si $f : A \to B$ est un morphisme d'anneaux, alors

$$\operatorname{Spec} f : \left\{\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} B & \longrightarrow & \operatorname{Spec} A \\ \mathfrak{p} & \longmapsto & f^{-1}(\mathfrak{p}) \end{array}\right.$$

est une application continue.

└ exercice : le vérifier

(regarder l'image réciproque d'un fermé)

NB : f^{-1} préserve la notion d'idéal premier, mais pas d'idéal maximal. C'est une des raisons de considérer les idéaux premiers dans $\operatorname{Spec} A$ plutôt que seulement les idéaux maximaux.

Exercices :

- Les $D(f) := \operatorname{Spec} A \setminus V((f))$, $f \in A$, forment une base d'ouverts de la topologie de $\operatorname{Spec} A$.
  └ appelés ouverts distingués
- $\operatorname{Spec} A_f$ est homéomorphe à $D(f)$.
- $I(Z) := \{ x \in A \mid \forall \mathfrak{p} \in Z \quad x \in \mathfrak{p} \} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in Z} \mathfrak{p}$ (idéal)
  Montrer que les propriétés élémentaires de V et I sont encore vraies.
- $V(I) \subseteq V(I')$ ssi $\sqrt{I} \supseteq \sqrt{I'}$.
  (utiliser : $\sqrt{I}$ = intersection des idéaux premiers contenant I)
- Si $U = \bigcap V(\alpha)$, alors $D(f) \subseteq U \iff f \in \sqrt{\alpha}$.
- Si A est noethérien, les ouverts de $\operatorname{Spec} A$ sont quasi-compacts.
  (indication : se ramener à un recouvrement par des ouverts distingués)

2 - Schémas affines : le faisceau structural

L'espace $\mathrm{Spec}\, A$ est muni d'une structure d'espace annelé (ringed space)

Déf : Un espace annelé est la donnée de :

- un espace topologique X
- pour tout ouvert U de X, d'un anneau $\mathcal{F}(U)$

tq $\mathcal{F}$ soit un faisceau d'anneaux sur X, i.e. (sheaf)

préfaisceau (presheaf) :

- si $U \supseteq V$ ouverts, on a un morphisme $\rho_{U,V} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ (« restriction »)
- $\rho_{U,U} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$
- si $U \supseteq V \supseteq W$, alors $\rho_{U,W} = \rho_{V,W} \circ \rho_{U,V}$

recollement :

- pour tout ouvert U de X, pour tout recouvrement $(V_i)_{i\in I}$ de U par des ouverts de X, pour toute famille $(f_i)_{i\in I}$, $f_i \in \mathcal{F}(V_i)$ telle que $\forall i,j \in I$ $\rho_{V_i, V_i\cap V_j}(f_i) = \rho_{V_j, V_i\cap V_j}(f_j)$, alors $\exists!\, f \in \mathcal{F}(U)$ $f_i = \rho_{U,V_i}(f)$.

exemples : préfaisceau des fonctions constantes sur un espace X / faisceau des fonctions localement constantes sur X

intuition : on prend de décrire des fonctions avec un domaine de définition

En fait on peut remplacer l'espace topologique par une catégorie !

NB : préfaisceau de tuncs = foncteur contravariant de $\{$ouverts de $X\}$ vers $\{$tuncs$\}$.

NB : La propriété de recollement revient à dire que

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_i \mathcal{F}(V_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{F}(V_i \cap V_j)$$

est un égalisateur.

NB :
- $\mathcal{F}(U) =: \{$ sections de $\mathcal{F}$ sur $U\}$, aussi noté $\Gamma(U, \mathcal{F})$.
- On note $f|_V$ plutôt que $\rho_{U,V}(f)$.

NB : La propriété de recollement avec un recouvrement vide de $\emptyset$ donne : $\exists ! f \in \mathcal{F}(\emptyset)$,
donc $\mathcal{F}(\emptyset) = (0)$.

stalk

Déf (fibres d'un (pré)faisceau) :
Si $\mathcal{F}$ est un préfaisceau sur X, et si $x \in X$,
la fibre de $\mathcal{F}$ en x est
$$\mathcal{F}_x := \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U) \qquad \text{(pour les flèches } \rho_{U,V}\text{)}.$$

sheafification

Prop : (faisceautisation)
Si $\mathcal{F}$ est un préfaisceau sur X, on définit
$$\mathcal{F}'(U) = \left\{ (f_x)_{x \in U} \; ; \; \forall x \in U \; f_x \in \mathcal{F}_x \right.$$
$$\left. \text{t.q. } \exists V \text{ ouvert } x \in V \subseteq U \quad \exists f \in \mathcal{F}(V) \quad \forall y \in V \; f_y \text{ est l'image de } f \text{ dans } \mathcal{F}_y \right\}$$

C'est un faisceau, et on a pour tout ouvert U
un morphisme $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}'(U)$.
Si $\mathcal{F}$ est un faisceau, c'est même un isomorphisme.
Les fibres de $\mathcal{F}'$ sont isomorphes aux fibres de $\mathcal{F}$.

Rem : Cela permet de définir un faisceau à partir de ses fibres.
(Ce sera utilisé pour le faisceau structural)

Rem : Le foncteur de faisceautisation est l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli : si $\mathcal{F}$ est un préfaisceau et $\mathcal{G}$ un faisceau, on a $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}', \mathcal{G}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.
(Hom défini plus loin)

Rem : Le foncteur « fibre en x » est adjoint à gauche du foncteur « faisceau gratte-ciel en x »
où un faisceau gratte-ciel est un faisceau

$$\mathcal{F}(U) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin U \\ A & \text{si } x \in U \end{cases}$$

exercice : Vérifier que :

- $\mathcal{F}$ est un faisceau
- $\mathcal{F}_x = A$
- pour tout préfaisceau $\mathcal{G}$,

$$\underbrace{\mathrm{Hom}_{\text{préfaisceau}}(\mathcal{G}, \mathcal{F})}_{\text{défini plus loin}} \simeq \mathrm{Hom}_{\text{anneau}}(\mathcal{G}_x, \mathcal{F}_x)$$

(ajout 2026-09-15)

Prop. Le foncteur de faisceautisation n'est pas un adjoint à droite.

□ On montre que la faisceautisation ne commute pas aux limites projectives, et en particulier pas avec les produits (infinis).

$X = \mathbb{Q}$ (ici, l'important est d'avoir un espace qui n'est pas localement connexe.)

+ topologie induite par celle de $\mathbb{R}$

$\mathcal{F}$ = préfaisceau constant sur X à valeurs dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$\mathcal{F}'$ = faisceau des fonctions localement constantes sur un ouvert de X à valeurs dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

$\mathcal{F} \longmapsto \mathcal{F}'$ faisceautisation.

$$\left(\prod_{i=1}^{+\infty} \mathcal{F}\right)(U) \simeq \prod_{i=1}^{+\infty} \mathcal{F}(U)$$

$$\left(\prod_{i=1}^{+\infty} \mathcal{F}'\right)(U) \simeq \prod_{i=1}^{+\infty} \mathcal{F}'(U)$$

car $U \longmapsto \prod_{i=1}^{+\infty} \mathcal{F}'(U)$ est un faisceau. (Ceci vient du fait que le foncteur d'oubli faisceaux $\to$ préfaisceaux est un adjoint à droite, donc commute aux limites projectives, donc aux produits.)

Soit $f_n : \begin{cases} X \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \frac{\sqrt{2}}{n} \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{\sqrt{2}}{n} \end{cases} \end{cases}$

NB : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ est le point important ici.

On a $f_n \in \mathcal{F}'(X)$, donc $(f_n)_{n\geq 1} \in \prod_{i=1}^{+\infty} \mathcal{F}'(X)$.

Si $(f_n)_{n\geq 1} \in \left(\prod_{i=1}^{+\infty} \mathcal{F}\right)'(X)$, il existerait un ouvert $U \ni 0$ de X tel que $(f_n|_U)_{n\geq 1}$ soit une fonction constante $U \longrightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$.

Comme $f_n(0) = 1$ $(\forall n \geq 1)$, on aurait donc $U \subseteq \underbrace{\bigcap_{n=1}^{+\infty} \{x \in X / |x| < \frac{\sqrt{2}}{n}\}}_{=\{0\}}$

donc $U = \{0\}$, et ce n'est pas un ouvert de X.

Donc $\left(\prod \mathcal{F}\right)' \longrightarrow \left(\prod \mathcal{F}'\right)$ n'est pas un isomorphisme. ☒

preuve (faisceautisation) :

- Par construction, $\mathcal{F}'$ est un préfaisceau (avec les restrictions évidentes).
- La propriété de recollement est immédiate d'après la définition.
- Les morphismes $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}_x$ pour $x \in U$ donnent des morphismes $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}'(U)$.
  On en déduit pour tout $x \in X$ un morphisme $\mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{F}'_x$.
  Par définition de $\mathcal{F}'$, il est surjectif.
  Par construction (limites inductives), il est injectif.
  Donc $\mathcal{F}_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}'_x$
- Si $\mathcal{F}$ est un faisceau, on en déduit (cf. preuve plus loin) que $\mathcal{F}(U) \simeq \mathcal{F}'(U)$ $\forall U$ ouvert.
- Si $\mathcal{G}$ est un faisceau,
  $\forall U$ ouvert, $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}'(U)$ induit un morphisme
  $$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}'(U), \mathcal{G}(U)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U))$$
  La propriété de recollement de $\mathcal{G}$ montre la surjectivité.
  L'unicité de la propriété de recollement montre l'injectivité. ☐

Rem : L'isomorphisme $\mathcal{F}_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}'_x$ peut se déduire de la propriété d'adjonction : le foncteur composé

fibre ∘ faisceautisation

est adjoint à gauche de

oubli ∘ gratte-ciel,

ce qui fait de fibre et fibre ∘ faisceautisation deux adjoints du foncteur « préfaisceau gratte-ciel ».
Par unicité de l'adjoint, on en déduit $\mathcal{F}'_x \simeq \mathcal{F}_x$.

fin du cours n°2 (2026-03-11)

Si $X = \operatorname{Spec} A$, on veut définir le <u>faisceau structural</u> $\mathcal{O}_X$ de sorte que $\mathcal{O}_X(X) = A$

$\mathcal{O}_X(D(f)) = A_f$ localisé de A en $\{f^n ; n \geq 0\}$

(aussi noté $A[1/f]$, attention au cas où A n'est pas intègre !)

intuition : $D(f)$ est l'ouvert où f est inversible

Si $D(g) \subseteq D(f)$, on a $V(f) \subseteq V(g)$ i.e. $\sqrt{(g)} \subseteq \sqrt{(f)}$

i.e. $g \in \sqrt{(f)}$

i.e. $\exists n \geq 1 \quad g^n \in (f)$

Dans ce cas, on a un morphisme

$$\begin{cases} A_f \longrightarrow A_g \\ \dfrac{a}{f^m} \longmapsto \dfrac{a\, y^{nm}}{g^{nm}} \end{cases} \qquad \text{avec } g^n = fy \quad (y \in A)$$

On définit $\mathcal{O}_X$ de manière à ce que la fibre en $p \in \operatorname{Spec} A$ soit A_p (localisé en p, i.e. avec la partie multiplicative $A \setminus p$)

$$\mathcal{O}_X(U) := \left\{ (f_p)_{p \in U} \;;\; \forall p \in X \; f_p \in A_p \right.$$

$p \in D(g) \iff g \notin p$

$\exists y \; \exists g \in A \quad p \in D(g) \subseteq U$

$\exists f \in A_g \quad \forall q \in D(g) \; f_q$ est l'image de f dans A_q $\left.\right\}$

On obtient un faisceau $\mathcal{O}_X$.

Exercice :

- Montrer que si $p \in \operatorname{Spec} A$, alors $\mathcal{O}_{X,p} \simeq A_p$. (anneau local)
- Montrer que $\mathcal{O}_X(D(f)) \simeq A_f$. (En particulier $\mathcal{O}_X(X) = A$, avec $f = 1$)
- Montrer que $\mathcal{O}_X(U) \simeq \varprojlim_{f \in A,\ D(f) \subseteq U} A_f$ (limite projective pour les $A_f \to A_g$ quand $D(g) \subseteq D(f)$)

(interprétation : pas de pôle dans U $\Leftrightarrow$ pas de pôle dans les $D(f)$ qui recouvrent U)

- Montrer qu'en ayant pu définir $\mathcal{O}_X$ par le point précédent, on montrait directement la propriété de recollement.

Vérification de la propriété de recollement

Si $\mathcal{O}_X(U) := \varprojlim_{\substack{f \in A \\ \text{t.q. } D(f) \subseteq U}} A_f$

U ouvert de $X = \operatorname{Spec} A$

$(U_i)_{i \in I}$ recouvrement ouvert de U

$g_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$ avec $g_i|_{U_i \cap U_j} = g_j|_{U_i \cap U_j}$

Sans perte de généralité, on peut supposer $U_i = D(f_i)$ (donc $g_i \in A_{f_i}$)

Il suffit de montrer l'existence d'un unique recollement sur $D(f)$

Soit $D(f) \subseteq U$. On a $D(f) \cap D(f_i) = D(ff_i)$

$\bigcup_{i \in I} D(ff_i) = D(f) \cap U = D(f)$

Comme $D(f) \simeq \operatorname{Spec} A_f$ est quasi-compact,

$\exists J \subseteq I$ fini $\quad \bigcup_{i \in J} D(ff_i) = D(f)$

Il suffit de considérer le cas de deux ouverts U_i.

On est ramené à

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A_f \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{f'} & \longrightarrow & A_{ff'} \end{array} \qquad \langle f, f' \rangle = A$$

$g \in A_f$, $g' \in A_{f'}$ avec même image dans $A_{ff'}$

$g = \frac{a}{f^m}$ $\quad g' = \frac{a'}{f'^{m'}}$ $\quad \left(\frac{a}{f^m} - \frac{a'}{f'^{m'}}\right)(ff')^{m''} = 0$

- On peut supposer $m'' \mid m$ et $m'' \mid m'$ (quitte à augmenter m et m'), puis $m'' = 1$ (quitte à remplacer f par $f^{m''}$, f' par $f'^{m''}$)
- Si $\langle f, f' \rangle = A$, alors $\exists u, v \in A$ $uf + vf' = 1$, d'où $1 = (uf + vf')^{m+m'} \in \langle f^m, f'^{m'} \rangle$. (Réciproquement, $1 \in \langle f^m, f'^{m'} \rangle \Rightarrow 1 \in \langle f, f' \rangle$ est facile.)

donc on peut supposer $m = 1$ (quitte à remplacer f par f^m)
et de même pour $m' = 1$. (quitte à remplacer f' par $f'^{m'}$).

$a, a' \in A$

$f, f' \in A$ $\qquad uf + vf' = 1$

$af' = a'f$

On veut résoudre $\begin{cases} xf = a \\ xf' = a' \end{cases}$

S'il y a une solution, alors

$x = x(uf + vf') = ua + va'$ d'où l'unicité

On a

$$\begin{aligned} (ua + va')f &= uf\,a + vf\,a' \\ &= (1 - vf')a + vf\,a' \\ &= a + v(f\,a' - f'a) \\ &= a \end{aligned}$$

d'où l'existence. ☒

On a donc bien la propriété de recollement

Exemples : . $A = K[x]$

$\operatorname{Spec} A = \{0\} \cup \{(x-a) \ ; \ a \in K\}$

x = pt générique

fermés = $\operatorname{Spec} A$ et les parties finies de $\operatorname{Spec} A$

$V(f) = \{\text{racines de } f\}$ ($\sin f \neq 0$)

$D(f)$ = complémentaire des racines de f

$\mathcal{O}_X(D(f)) = K[x]\left[\frac{1}{f}\right]$

= fractions rationnelles dont les pôles sont dans $V(f)$ ($\Leftrightarrow$ définies sur $D(f)$)

La fibre au pt générique (0) est $\operatorname{Frac} K[x] = K(x)$

. $A = \mathbb{Z}$

$\operatorname{Spec} \mathbb{Z} = \{0\} \cup \{(p) \ ; \ p \text{ premier}\}$

$V(n) = \{\text{diviseurs premiers de } n\}$ ($\sin n \neq 0$)

$\mathcal{O}_X(D(n))$ = fractions dont le dénominateur divise une puissance de n

La fibre au pt générique est $\mathbb{Q}$.

Rem : Plutôt que de regarder les idéaux premiers, on peut regarder les valeurs absolues, i.e.

$|\cdot| : \operatorname{Frac} A \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ t.q.

- $|x| = 0$ ssi $x = 0$
- $|xy| = |x|\,|y|$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$

$\Rightarrow$ distance $x, y \mapsto |x-y|$

Lussels & Fröhlich chap II « Global fields »

Deux valeurs absolues sont équivalentes si elles donnent la même topologie. Valeur abs triviale : $|x| = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ 1 \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$

Th (Ostrowski) : Les valeurs absolues non triviales sur $\mathbb{Q}$ sont, à équivalence près :

- la valeur absolue usuelle $|x|_\infty = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$
- les valeurs absolues p-adique $|x|_p = p^{-v_p(x)}$, pour p premier.

Si k est un corps, les valeurs absolues non triviales sur $K = k(X)$ qui sont triviales sur k sont (à équivalence près) :

- les valeurs absolues P-adiques pour P irréductible dans $k[X]$
  ($\longrightarrow$ si k est alg. clos, alors $P(X) = X - a$ (si unitaire))
  $|Q| = e^{-\text{ordre}_a(Q)}$ où $\text{ordre}_a(Q)$ est l'ordre en a de Q (multiplicité de a comme racine))
- $|Q|_\infty := e^{-\deg(Q)}$

On peut définir les « points » comme des valeurs absolues ! On parle plutôt de « places » dans ce cas.
Cela ajoute des points « à l'infini ».

$\longrightarrow$ voir le lien avec la géométrie projective pour $k(X)$
(schéma $\mathbb{P}^1$, plus loin)

$\longrightarrow$ géométrie d'Arakelov pour les points « archimédiens »
(utilisé pour les Eq. diophantiennes)

$\longrightarrow$ voir aussi les espaces de Berkovich
(plus proche de l'analyse, non archimédienne)

(fin de la remarque)

Déf : Morphismes de (pré) faisceaux

Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux préfaisceaux sur X, un morphisme $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ de préfaisceaux est la donnée pour chaque ouvert U de X d'un morphisme
$\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$
tels que $\forall U, V$ ouverts t.q. $V \subseteq U$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi(U)} & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow \rho_{U,V} & & \downarrow \rho'_{U,V} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi(V)} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

commute.

(cf. notion de « transformation naturelle »)

Un morphisme de faisceau est un morphisme de préfaisceaux entre deux faisceaux. Un isomorphisme de (pré)faisceaux est un morphisme inversible à gauche et à droite.

Prop : Un morphisme de (pré)faisceaux induit des morphismes au niveau des fibres

$$\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G} \quad \text{induit} \quad \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x \quad (\forall x \in X)$$

Prop : Si $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est un morphisme de faisceaux, alors φ est un isomorphisme ssi il induit un isomorphisme sur les fibres.

⚠ Ce n'est pas vrai pour des préfaisceaux : considérons $\mathcal{F}$ le préfaisceau de fonctions constantes sur X, $\mathcal{F}'$ son faisceautisé (= faisceau des fonctions localement constantes sur X), on a $\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ et $\forall x \in X \ \mathcal{F}_x \simeq \mathcal{F}'_x$. Si X n'est pas connexe, $\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ n'est pas un isomorphisme : il y a des fonctions localement constantes, mais non constantes.

□ $\Rightarrow$: facile d'après les définitions

$\Leftarrow$: $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$

$\forall x \quad \varphi_x : \mathcal{F}_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_x$

Il suffit de montrer que pour tout ouvert U, le morphisme $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ est un isomorphisme.

- si $f, g \in \mathcal{F}(U)$ t.q. $\varphi(U)(f) = \varphi(U)(g)$:

  pour tout $x \in U$, on a $f = g$ dans $\mathcal{F}_x$,

  i.e. $\exists V_x$ ouvert t.q. $x \in V_x \subseteq U$ et $f|_{V_x} = g|_{V_x}$.

  Comme $\bigcup_{x \in U} V_x = U$, on a $f = g$ par (unicité dans) la propriété de recollement.

fin du cours n°3 (2026-09-16)

- si $g \in \mathcal{G}(U)$, pour tout $x \in U$ $\exists V_x$ ouvert t.q. $x \in V_x \subseteq U$

$\exists f_x \in \mathcal{F}(V_x)$ t.q. $\varphi(V_x)(f_x) = g$ dans $\mathcal{G}_x$

i.e. $\exists W_x$ ouvert $x \in W_x \subseteq V_x$

$\varphi(V_x)(f_x)|_{W_x} = g|_{W_x}$

i.e. $\varphi(W_x)(f_x|_{W_x}) = g|_{W_x}$

De plus, $\forall x, y \in U$

$$\varphi(W_x)(f_x|_{W_x})|_{W_x \cap W_y} = g|_{W_x \cap W_y} = \varphi(W_y)(f_y|_{W_y})|_{W_x \cap W_y}$$

donc $\varphi(W_x \cap W_y)(f_x|_{W_x \cap W_y}) = \varphi(W_x \cap W_y)(f_y|_{W_x \cap W_y})$

donc par injectivité de $\varphi(W_x \cap W_y)$ (pt précédent)

on a $f_x|_{W_x \cap W_y} = f_y|_{W_x \cap W_y}$

On recollement, $\exists f \in \mathcal{F}(U)$ t.q. $\forall x \in U$ $f|_{W_x} = f_x|_{W_x}$ $\left(U = \bigcup_{x \in U} W_x\right)$

donc $\forall x \in U$ $\varphi(W_x)(f|_{W_x}) = g|_{W_x}$

$\varphi(U)(f)|_{W_x} = g|_{W_x}$

donc (unicité du recollement) $\varphi(U)(f) = g$. □

Déf-Prop Si $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est un morphisme de préfaisceaux d'anneaux, on a des préfaisceaux

- $U \longmapsto \ker \varphi(U)$
- $U \longmapsto \operatorname{coker} \varphi(U)$
- $U \longmapsto \operatorname{im} \varphi(U)$

exercice →

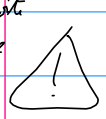
Si φ est un morphisme de faisceaux,

$U \longmapsto \ker \varphi(U)$

est un faisceau (faux pour les deux autres).

Le conoyau et l'image faisceautiques de φ sont les faisceautisés de $U \longmapsto \operatorname{coker} \varphi(U)$ et $U \longmapsto \operatorname{im} \varphi(U)$.

Ceci est lié au fait que le foncteur d'oubli est adjoint à droite au foncteur de faisceautisation, donc commute aux limites projectives.



Exemple où coker est différent dans la catégorie de préfaisceaux et dans la catégorie des faisceaux.

$X = [0, 1)$ $\qquad i : Y \longrightarrow X$

$Y = \{0, 1\}$

$\mathcal{F}$ = faisceau des fonctions localement constantes sur un ouvert de X

$\mathcal{G} = i_*$ (fonctions loc. cst sur Y) $\qquad \mathcal{G}(U)$ = fonctions loc cst sur $i^{-1}(U) = U \cap Y$

$\begin{cases} \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U) \\ f \longmapsto f_{U \cap Y} \end{cases}$

$U = X$

$U_0 = [0, 1[\qquad U_1 =]0, 1]$ ouverts de X

$U = U_0 \cup U_1$

$\mathcal{F}(U_0) = \mathbb{R} \qquad \mathcal{F}(U_1) = \mathbb{R} \qquad \mathcal{F}(U) = \mathbb{R}$

$\mathcal{G}(U_0) = \mathbb{R} \qquad \mathcal{G}(U_1) = \mathbb{R} \qquad \mathcal{G}(U) = \mathbb{R}^2$

$\operatorname{coker}(\mathcal{F} \to \mathcal{G})(U_0) = 0$

$\operatorname{coker}(\mathcal{F} \to \mathcal{G})(U_1) = 0$

$\operatorname{coker}(\mathcal{F} \to \mathcal{G})(U) = \mathbb{R}$

$\operatorname{coker}(\mathcal{F} \to \mathcal{G})(U)$ contient un élément $\neq 0$ dont les restrictions aux $\operatorname{coker}(\mathcal{F} \to \mathcal{G})(U_i)$ sont $= 0$, or $U = U_0 \cup U_1$ donc $\operatorname{coker}(\mathcal{F} \to \mathcal{G})$ n'est pas un faisceau.

Déf - Prop : Un morphisme de faisceaux d'anneaux est injectif si son noyau est le faisceau nul
C'est équivalent à l'injectivité de tous les $\varphi(U)$
Un morphisme de faisceaux d'anneaux est surjectif si son coker est nul.
⚠ Les $\varphi(U)$ ne sont pas forcément surjectifs dans ce cas.

Prop : Une suite de faisceaux et morphismes est exacte ssi les suites induites sur les fibres sont exactes.

preuve : exercice.

monomorphismes / épimorphismes
i.e. l'injectivité, la surjectivité se vérifient sur les fibres. Ce sont des propriétés locales (pour les faisceaux)

Déf : Si $f : X \to Y$ est une application continue.
Si $\mathcal{F}$ est un (pré)faisceau sur X, on définit l'image directe $f_* \mathcal{F}$ par $f_*(\mathcal{F})(V) := \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ pour tout ouvert V de Y.
push forward

Si $\mathcal{G}$ est un (pré)faisceau sur Y, on définit l'image réciproque $f^{-1}\mathcal{G}$ comme (le faisceautisé de)
$U \longmapsto \varinjlim_{V \supseteq f(U)} \mathcal{G}(V)$
V ouvert

⚠ $f(U)$ n'est pas forcément un ouvert !

f_* et f^{-1} sont des fonctions entre les catégories des faisceaux sur X et sur Y.

Si $Z \subseteq Y$ et $f : Z \xrightarrow{\subseteq} Y$, alors $f^{-1}\mathcal{G}$ est appelé la restriction de $\mathcal{G}$ à Z.

Si Z est ouvert, on a $\varinjlim_{U \subseteq Z \text{ ouvert}} \mathcal{G}(V) = \mathcal{G}(V)$ pour tout $V \subseteq Z$ ouvert

Exemple : • $x \in X$, $f : \{x\} \xrightarrow{c} X$

Un préfaisceau $\mathcal{F}$ d'ensembles sur $\{x\}$ est un ensemble A.

$(\mathcal{F}(\emptyset) = (0), \quad \mathcal{F}(\{x\}) = A)$

$f_* \mathcal{F}(U) = \begin{cases} A \text{ si } x \in U \\ (0) \text{ si } x \notin U \end{cases}$ faisceau quelle - soit

Si $\mathcal{G}$ est un préfaisceau sur X, alors

$f^{-1}\mathcal{G}(\emptyset) = \varinjlim_{U \text{ ouvert}} \mathcal{G}(U) = (0)$

↑ car $\mathcal{G}(\emptyset) = (0)$.

$f^{-1}\mathcal{G}(\{x\}) = \varinjlim_{\substack{U \text{ ouvert} \\ x \in U}} \mathcal{G}(U) = \mathcal{G}_x$ fibre en x.

Prop : • Le foncteur f^{-1} est l'adjoint à gauche du foncteur f_* :

$\mathrm{Hom}_{\text{faisceaux sur } X}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \overset{\text{bijection}}{\simeq} \mathrm{Hom}_{\text{faisceaux sur } Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$

• Donc f^{-1} est exact à droite et f^* est exact à gauche

• f^{-1} est exact à gauche et à droite

• si $x \in X$, on a $(f^{-1}\mathcal{G})_x \simeq \mathcal{G}_{f(x)}$.

(↙ donc la fibre en x est adjoint à gauche du foncteur faisceau quelle - soit en x.)

□ • Les fibres de $f^{-1}\mathcal{G}$ découlent de la définition + la faisceautisation ne change pas les fibres.

• L'exactitude de f^{-1} s'en déduit, car elle se vérifie sur les fibres

• L'exactitude à gauche de f^* découle de la propriété d'adjonction.

• Pour l'adjonction, notons d'abord que $\mathrm{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F})$ ne change pas si $f^{-1}\mathcal{G}$ est faisceautisé. Il suffit donc de considérer le cas des préfaisceaux.

Soit V un ouvert de Y, on veut vérifier que

$\mathrm{Hom}\left(\varinjlim_{\substack{W \supseteq V \\ W \text{ ouvert}}} \mathcal{G}(W), \mathcal{F}(f^{-1}(V))\right) \simeq \mathrm{Hom}\left(\mathcal{G}(V), \mathcal{F}(f^{-1}(V))\right)$

ce qui est vrai puisque $\varinjlim_{\substack{W \supseteq V \\ W \text{ ouvert}}} \mathcal{G}(W) = \mathcal{G}(V)$ par les restrictions. □

3- Schémas

Déf Un espace annelé (= espace topologique + faisceau d'anneaux) de la forme $\operatorname{Spec} A$ (muni du faisceau structural $\mathcal{O}_X$) est appelé un *schéma affine*.

Déf : Un espace *localement* annelé est un espace annelé dont les fibres sont des anneaux locaux.

Exc : Les schémas affines sont localement annelés.

(A_p, localisé de A pour la partie multiplicative $A \setminus p$, est un anneau local)

↳ car p est premier

Déf : Un *schéma* est un espace (localement) annelé tel que pour tout $x \in X$ il existe un ouvert U contenant x tel que la restriction de X à U soit un schéma affine. (i.e. X est *localement* un schéma affine)

Déf : Un *morphisme de schéma* ✓ de $(X, \mathcal{O}_X)$ dans $(Y, \mathcal{O}_Y)$ est un morphisme d'espaces *localement* annelés entre les deux schémas, i.e.

- une application continue $f : X \longrightarrow Y$
- un morphisme de faisceaux d'anneaux (sur Y) $f^\# : \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_* \mathcal{O}_X$

tel que $\forall P \in X$:

$f^\#$ donne $\forall U \ni f(P)$ ouvert un morphisme

$$\mathcal{O}_Y(U) \longrightarrow f_* \mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$$

d'où $\varinjlim_{U} \mathcal{O}_Y(U) \longrightarrow \varinjlim_{U} \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) \longrightarrow \varinjlim_{V \text{ ouvert}, V \ni P} \mathcal{O}_X(V)$

$\varinjlim_{U} \mathcal{O}_Y(U) \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{O}_{Y, f(P)}$

car les $f^{-1}(U)$ sont des ouverts contenant P

$\varinjlim_{V \text{ ouvert}, V \ni P} \mathcal{O}_X(V) \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{O}_{X,P}$

donc $f^\#$ induit un morphisme sur les fibres $f_P^\# : \mathcal{O}_{Y, f(P)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,P}$.

Cette propriété est importante : elle fait le lien entre $f^\#$ (aspect algébrique) et f (aspect topologique).

→ On demande que $f_p^\#$ soit un morphisme local d'anneaux locaux, i.e. si m est l'idéal max de $\mathcal{O}_{X,p}$ et m' celui de $\mathcal{O}_{Y,f(p)}$ on ait $(f_p^\#)^{-1}(m) = m'$.

Un isomorphisme de schémas est un morphisme de schémas qui a un morphisme réciproque de chaque côté.

Prop : Si X est un espace localement annelé, et si $Y = \operatorname{Spec} A$ est un schéma affine, alors l'application

$$\operatorname{Hom}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}\left(\underbrace{\mathcal{O}_Y(Y)}_{=A}, \mathcal{O}_X(X)\right)$$

(espaces loc. annelés ; bijection ; anneaux ; sections globales)

$$f \longmapsto f^\#(Y)$$

est bijective

source : Stacks project, 6.4 : 2.26 ou Hartshorne II.2. Ex 1

□ . Si $\Psi : \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X)$ est un morphisme d'anneaux, si $x \in X$, on a

$$A = \mathcal{O}_Y(Y) \xrightarrow{\Psi} \mathcal{O}_X(X) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

(fibre en x ; anneau local ; m_x idéal maximal (unique))

Ceci justifie l'importance de prendre des idéaux premiers dans la définition de $\operatorname{Spec} A$: l'image inverse d'un idéal maximal n'est pas forcément un idéal maximal.

$\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$; (0) idéal max ; mais (0) est premier non maximal dans $\mathbb{Z}$,

→ Soit $\wp_x$ l'idéal premier de A qui est l'image inverse de m_x.

On pose $f(x) := \wp_x \in \operatorname{Spec} A$.

Montrons que l'application f est continue. Pour cela, il suffit de montrer que $f^{-1}(D(g))$ est ouvert, pour tout $g \in A$.

On a $f^{-1}(D(g)) = \{x \in X \mid \Psi(g) \notin m_x\}$

$= \{x \in X \mid \Psi(g) \in \mathcal{O}_{X,x}^\times\}$.

Si $x \in f^{-1}(D(g))$, on a $\psi(g) \in \mathcal{O}_{X,x}^\times$, donc il existe un ouvert $V_x \ni x$ et $h_x \in \mathcal{O}_X(V_x)$ tels que $\psi(g) h_x = 1$ dans $\mathcal{O}_X(V_x)$

Si $y \in V_x$, on a $\psi(g) h_x = 1$ dans $\mathcal{O}_{X,y}$, donc $y \in f^{-1}(D(g))$

Donc $V_x \subseteq f^{-1}(D(g))$, donc $f^{-1}(D(g)) = \underbrace{\bigcup_{x \in f^{-1}(D(g))} V_x}_{\text{ouvert}}$

Donc f est continue (De plus, par recollement des h_x (unicité de l'inverse $\longrightarrow h_x|_{V_x \cap V_y} = h_y|_{V_x \cap V_y}$), on a $\psi(g) \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(D(g)))^\times$)

- Si V est un ouvert de $Y = \operatorname{Spec} A$, on veut construire

$$f^\#(V) : \underbrace{\mathcal{O}_Y(V)}_{\varprojlim_{\substack{g \in A \\ t.q.\ D(g) \subseteq V}} A_g} \longrightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$$

Soit $s \in \mathcal{O}_Y(V)$, soit $g \in A$ tel que $D(g) \subseteq V$,

on a $s|_{D(g)} \in \mathcal{O}_Y(D(g)) = A_g$,

or ψ induit $A_g \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)_{\psi(g)}$,

et $\psi(g) \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(D(g)))^\times$ donc on a $\mathcal{O}_X(X)_{\psi(g)} \longrightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}D(g))$

On trouve donc des morphismes

$$\mathcal{O}_Y(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(\underbrace{f^{-1}(D(g))}_{\subseteq f^{-1}(V)})$$

Pour tout $x \in f^{-1}(V)$, ces morphismes se localisent en

$A_{\mathfrak{p}_x} \simeq \mathcal{O}_{Y,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ induit par ψ

et on en déduit qu'ils sont compatibles aux intersections.

Par recollement, on en déduit un morphisme

$$f^\#(V) : \mathcal{O}_Y(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(\underbrace{f^{-1}(V)}_{= \bigcup_{D(g) \subseteq V} f^{-1}(D(g))})$$

fin du cours n°4 (2026-09-18)

- Par construction, les $f^\#(V)$ sont compatibles aux restrictions.

- Dans le cas $V = \operatorname{Spec} A$, on a $f^\#(Y) = \varphi$ par construction.
- Si $\varphi = f'^\#(Y)$ pour un certain $f' \in \operatorname{Hom}(X, Y)$,
alors $\forall x \in X \quad \left(f'^\#_x\right)^{-1}(m_x)$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{Y, f(x)} = A_{f(x)}$
i.e. $\gamma_x = f(x)$, donc $f = f'$ sur les espaces topologiques.

De plus, $f'^\#_x : A_{\gamma_x} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ est induit par φ,
donc correspond à $f^\#_x$. On invoque la recollement,
on en déduit $f^\# = f'^\#$. Donc $f = f'$. ∎

Cor : Si A et B sont des anneaux, alors :

- si $\varphi : A \to B$ est un morphisme d'anneaux,
alors φ induit un morphisme de schémas
$$\operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A .$$
- tous les morphismes d'espaces loc. annelés $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ sont de cette forme.

exercice : prouver qu'on a une transformation naturelle

□ On a $\operatorname{Hom}_{\text{espaces loc annelés}}(\operatorname{Spec} B, \operatorname{Spec} A) \simeq \operatorname{Hom}_{\text{anneaux}}(A, B)$
d'après la proposition précédente. ∎

(ajout 2026-09-28)

Rem : Soit X un schéma, et U un ouvert de X.
Soit $s \in \mathcal{O}_X(U)$. Si $x \in U$, notons $s(x) \in k(x) (:= \frac{\mathcal{O}_{X,x}}{\mathfrak{m}_x})$
(avec $\mathcal{O}_{X,x}$ fibre en x, $\mathfrak{m}_x$ idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$)
$k(x)$ corps résiduel en x
l'image de s dans $k(x)$ (qui est un quotient de $\mathcal{O}_{X,x}$).
Notons $D(s) := \{x \in U \,/\, s(x) \neq 0\}$.
Si U est affine, on a $s(x) \neq 0 \iff s \notin \mathfrak{m}_x$
$\iff s \notin x$ (x idéal premier de $\mathcal{O}_X(U)$)
$\iff x \in D(s)$ dans le schéma affine U.
pour la définition de $D(s)$ dans les schémas affines.

Dans le cas général, pour tout ouvert affine V contenu dans U, $D(s) \cap V$ est un ouvert distingué de V.
Or X est réunion d'ouverts affines, donc U est réunion de $\underbrace{U \cap V}_{\text{ouvert de } V}$ pour V ouvert affine, et tout ouvert d'un schéma affine est réunion d'ouverts distingués, qui sont des ouverts affines. Donc les $U \cap V$ sont réunions d'ouverts affines, donc U est réunion d'ouverts affines.
Donc $D(s)$ est réunion d'ouverts donc est un ouvert.
Son complémentaire, $V(s) := \{x \in U \,/\, s(x) = 0\}$, est un fermé de U.

Rem : Les ouverts d'un schéma affine ne sont pas forcément des schémas affines.

contre-exemple :

$A = k[X,Y]$ $\quad k$ corps

$(0,0) \in \operatorname{Spec} A$ (plan affine)

↑ idéal maximal (X,Y)

$U := \operatorname{Spec} A \setminus \{(0,0)\}$ ouvert de $\operatorname{Spec} A$

U est un schéma (les ouverts distingués sont affines).

Si U était affine, l'anneau associé serait

$$B = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(U) = \varprojlim_{D(f) \subseteq U} A_f = \varprojlim_{\substack{f \in A \\ f(0,0) \neq 0}} A_f \hookrightarrow \operatorname{Frac} A$$

Comme X et Y vérifient $f(0,0) = 0$ et n'ont aucun diviseur commun non inversible, on a $B = A$,

donc $U \subsetneq \operatorname{Spec} A$ viendrait d'un morphisme $A \to A$,

qui serait id (en considérant les sections sur U),

mais il n'est pas injectif sur les spectres : contradiction. ☒

Rem : Si X est un schéma, U un ouvert de X,

→ alors U muni du faisceau $\mathcal{O}_X$ restreint aux ouverts contenus dans U est bien un schéma, et $U \to X$ est un morphisme de schémas.

(exercice)

C'est le faisceau $f^{-1}\mathcal{O}_X$, où $f : U \hookrightarrow X$, i.e. la restriction du faisceau $\mathcal{O}_X$ à U.

Déf : $\mathbb{A}^1_R := \mathrm{Spec}\, R[x]$ droite affine sur l'anneau R.
$\mathbb{A}^2_R := \mathrm{Spec}\, R[x,y]$ plan affine sur l'anneau R.
$\mathbb{A}^n_R := \mathrm{Spec}\, R[x_0, \dots, x_{n-1}]$ espace affine sur l'anneau R.

Déf : Si S est un schéma, on appelle <u>schéma sur S</u> (ou S-schéma ou schéma au-dessus de S) la donnée d'un schéma X et d'un morphisme $X \longrightarrow S$ (appelé <u>morphisme structural</u>).

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ S \end{array}$$

Rem : Si $S = \operatorname{Spec} A$ est affine, cela revient à se donner un morphisme d'anneaux $A \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)$, puisque

$$\operatorname{Hom}_{\text{schémas}}(X, S) \underset{\text{bij}}{\simeq} \operatorname{Hom}_{\text{anneaux}}(A, \mathcal{O}_X(X))$$

Exemples :
- $\mathbb{A}^n_R$ est un schéma sur $\operatorname{Spec} R$.
- $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ est objet final dans la catégorie des schémas.
  ↳ $\mathbb{Z}$ est objet initial dans la catégorie des anneaux, donc on a $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)$ pour tout schéma X.

L'image de $x \in X$ correspond à la caractéristique du corps résiduel en x $\quad k(x) := \mathcal{O}_{X,x} / \text{idéal maximal}$.

i.e. tout schéma est un $(\operatorname{Spec} \mathbb{Z})$-schéma.

Déf : Un morphisme de S-schémas $X \longrightarrow Y$ est un morphisme de schémas qui fait commuter

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & S & \end{array}$$

Déf : Un point d'un S-schéma X à valeurs dans un S-schéma T est un morphisme de S-schémas $T \longrightarrow X$.
On note $X(T)_S$ l'ensemble de ces points.
($X(T)$ si S est implicite, $X(A)$ si $T = \operatorname{Spec} A$).

Exemple : Si k est un corps,

$$X = \operatorname{Spec}\left(k[X_0, \dots, X_{n-1}] / \mathcal{A} \right)$$ k-schéma affine

alors $X(k)$ est (en bijection avec) l'ensemble des éléments de k^n où tous les éléments de $\mathcal{A}$ s'annulent.

$\operatorname{Spec} k$ est un point (topologiquement)

□ Un morphisme $\mathrm{Spec}\, k \longrightarrow \mathrm{Spec}\, k[X_0, \dots, X_{n-1}]/\mathcal{C}$ correspond à un morphisme d'anneaux k-linéaire

$$k[X_0, \dots, X_{n-1}]/\mathcal{C} \longrightarrow k$$

qui est défini par les images de $X_0, \dots, X_{n-1}$ dans k. ☒

4 - L'espace projectif

Déf : Un anneau gradué S est un anneau muni d'une décomposition $S = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} S_d$ en somme directe de groupes abéliens

telle que $\forall d, d' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $\quad S_d \cdot S_{d'} \subseteq S_{d+d'}$

(multiplication de S)

$S_d = \{$ éléments homogènes de degré $d \}$.

Exemple : $S = k[x_0, \dots, x_{n-1}]$

$S_d = \{$ polynômes homogènes de degré $d \}$

$= \left\langle \prod_{\sum e_i = d} x_i^{e_i} \right\rangle_{k\text{-ev}}$

Déf : Un idéal α de S est dit homogène si

$$\alpha = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} (\alpha \cap S_d)$$

Prop : $S^+ := \bigoplus_{d > 0} S_d$ est un idéal de S.

Prop : Un idéal de S est homogène ssi il est engendré par des éléments homogènes.

preuve : exercice.

Prop : La somme, le produit, l'intersection, le radical d'idéaux homogènes sont homogènes.

preuve : exercice.

Prop : Le produit de S par un idéal homogène est un anneau gradué par les images de S_d par la projection canonique.

preuve : exercice

Prop : Un idéal homogène I de S est premier ssi $\forall f, g$ homogènes $\in I$ $\quad fg \in I \Rightarrow f \in I$ ou $g \in I$

preuve : exercice

Soit S un anneau gradué. On définit un schéma $\operatorname{Proj} S$ sur S.

L'espace topologique sous-jacent à $\operatorname{Proj} S$ est l'ensemble des idéaux premiers homogènes de S qui ne contiennent pas S^+.
Les fermés de $\operatorname{Proj} S$ sont les

$$V(\alpha) := \{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S \ / \ \alpha \subseteq \mathfrak{p} \}$$

pour α idéal homogène de S.

(exercice : vérifier que c'est une topologie :

$$V\left(\sum \alpha_i\right) = \bigcap V(\alpha_i)$$
$$V(\alpha \cup \alpha') = V(\alpha \alpha') \quad)$$

On définit maintenant un faisceau $\mathcal{O}$ sur cet espace topologique.
Si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S$, alors

$$T_{\mathfrak{p}} := \{ x \in S \ / \ x \text{ homogène et } x \notin \mathfrak{p} \}$$

est une partie multiplicative de S.
Soit $S_{(\mathfrak{p})} := \left\{ \frac{a}{b} \in \text{localisé de } S \text{ en } T \ / \ a \text{ et } b \text{ homogènes de même degré} \right\}$.
C'est un anneau local, d'idéal maximal $\left\{ \frac{a}{b} \in S_{(\mathfrak{p})} \ / \ a \in \mathfrak{p} \right\}$.
Si U est un ouvert de $\operatorname{Proj} S$, on définit

$$\mathcal{O}(U) := \left\{ (s_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in U} \ / \ \forall \mathfrak{p} \in U \quad s_{\mathfrak{p}} \in S_{(\mathfrak{p})} \right.$$
$$\left. \text{et } \exists V_{\mathfrak{p}} \text{ ouvert } \mathfrak{p} \in V_{\mathfrak{p}} \subseteq U \right.$$
$$\left. \exists a, b \in S \text{ (homogènes) de même degré} \right.$$
$$\left. \forall \mathfrak{q} \in V \quad b \notin \mathfrak{q} \text{ et } s_{\mathfrak{q}} = \frac{a}{b} \text{ dans } S_{(\mathfrak{q})} \right\}$$

C'est bien un faisceau (exercice),
si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S$, alors $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \cong S_{(\mathfrak{p})}$.

Si $f \in S^+$ homogène, posons

$$D_+(f) := \{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S \mid f \notin \mathfrak{p} \}.$$

C'est un ouvert de $\operatorname{Proj} S$ (complémentaire de $V((f))$)

On a $\bigcup_{\substack{f \in S^+ \\ \text{homogène}}} D(f) = \bigcap_{\substack{f \in S^+ \\ \text{homogène}}} V(\Sigma(f)) = \bigcap V(S^+) = \bigcap \phi = \operatorname{Proj} S$.

Les $D_+(f)$ forment donc un recouvrement de $\operatorname{Proj} S$ par des ouverts

On va construire un isomorphisme d'espaces annelés

$$(D_+(f), \mathcal{O}|_{D_+(f)}) \simeq \operatorname{Spec} S_{(f)}$$

où $S_{(f)} = \left\{ \frac{a}{f^m} \in S_f \;/\; a \text{ homogène de degré } m \deg f \right\}$

(sous-anneau des localisés de S en f)

Comme $\operatorname{Spec} S_{(f)}$ est affine, il suffit de :

- construire un morphisme $S_{(f)} \longrightarrow \mathcal{O}(D_+(f))$
- montrer qu'il induit des isomorphismes sur les fibres :

$$S_{(\mathfrak{p})} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathfrak{p}} \simeq S_{(\mathfrak{p})}.$$

Par définition, on a

$$\mathcal{O}(D_+(f)) = \left\{ (s_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in D_+(f)} \;;\; \forall \mathfrak{p} \in D_+(f) \quad s_{\mathfrak{p}} \in S_{(\mathfrak{p})} \right.$$

$\exists V_{\mathfrak{p}}$ ouvert $\mathfrak{p} \in V_{\mathfrak{p}} \subseteq D(f)$

$\exists a, b \in S$ homogènes de même degré

$\forall q \in V_{\mathfrak{p}}$ $b \notin q$ et $s_q = \frac{a}{b}$ dans $S_{(q)}$ $\Big\}$

On considère $\begin{cases} S_{(f)} \longrightarrow \mathcal{O}(D_+(f)) \\ \frac{a}{f^n} \longmapsto (s_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in D_+(f)} \end{cases}$ avec $s_{\mathfrak{p}} = \frac{a}{f^n}$ dans $S_{(\mathfrak{p})}$.

Cette application vérifie bien les deux points précédents.

Donc $(D_+(f), \mathcal{O}|_{D_+(f)})$ est un schéma affine.

Ceci prouve que $(\operatorname{Proj} S, \mathcal{O})$ est un schéma.

Déf : $\mathbb{P}^n_R := \mathrm{Proj}\, R[X_0, \dots, X_n]$ espace projectif sur R

$\mathbb{P}^1_R$ droite projective

$\mathbb{P}^2_R$ plan projectif

($\mathbb{P}^n_R \longrightarrow \mathrm{Spec}\, R$ venant de $R \longrightarrow S$.

Dans $\mathbb{P}^n_R$, on a $D_+(X_i) = \{ \mathfrak{p} \in \mathbb{P}^n_R \ / \ X_i \notin \mathfrak{p} \}$

$$\bigcup_{i=0}^{n} D_+(X_i) = \complement V\left(\sum_{i=0}^{n} (X_i)\right) = \mathbb{P}^n_R$$

$$\left(D_+(X_i), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}\big|_{D^+(X_i)} \right) \simeq \mathrm{Spec}\, R[X_0, \dots, X_n]_{(X_i)}$$

$$R[X_0, \dots, X_n]_{(X_i)} \xrightarrow[\text{évaluation en } X_i = 1]{\sim} R[X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_n]$$

← i.e. variable omise

$\longleftarrow$ homogénéisation + division par $X_i^{\deg}$

fin du cours n°5 (2026-09-18)

$$D_+(X_i) \cap D_+(X_j) = D_+(X_i X_j) = \{ \mathfrak{p} \in \mathbb{P}^n_R \ / \ X_i X_j \notin \mathfrak{p} \}$$

donc $D_+(X_i X_j)$ correspond à $D(X_j)$ dans $\mathrm{Spec}\, R[X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_n]$

Le R-point $(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n)$ correspond à $(x_0 : x_1 : \dots : 1 : \dots : x_n)$

si $x_j \neq 0$ ——— $\left(\frac{x_0}{x_j}, \dots, \hat{x}_j, \dots, \frac{x_n}{x_j} \right)$

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(\mathbb{P}^n_R) = \varprojlim_{i,j} \left(R[X_0, \dots, X_n]_{(X_i)} \longrightarrow R[X_0, \dots, X_n]_{(X_i X_j)} \right)$$

mais $\varprojlim \left(\begin{array}{c} R[X_0, \dots, X_n]_{(X_i)} \searrow \\ R[X_0, \dots, X_n]_{(X_j)} \nearrow \end{array} R[X_0, \dots, X_n]_{(X_i X_j)} \right)$

$= R$ (exercice)

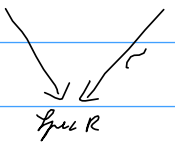
donc $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(\mathbb{P}^n_R) \simeq R$.

Si $\mathbb{P}^n_R$ était affine, on aurait $\mathbb{P}^n_R \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spec} R$

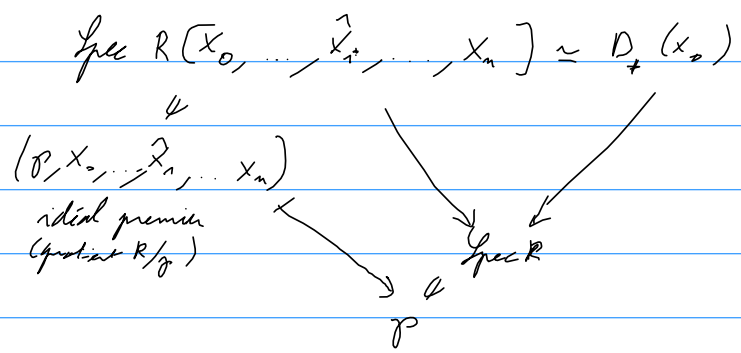
Pour $n=0$, on a $R[X_0]^+ = (X_0)$ donc $D_+(X_0) = \mathbb{P}^0_R$

et $\mathbb{P}^0_R \simeq \operatorname{Spec} \underbrace{R[X_0]_{(X_0)}}_{\simeq R}$.

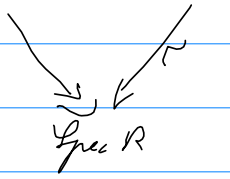
Pour $n \geq 1$, $D_+(X_i) \subseteq \mathbb{P}^n_R$ commute.



De plus, si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$, on a



donc $D_+(X_i) \subseteq \mathbb{P}^n_R$ donc $D_+(X_i) = \mathbb{P}^n_R$,



donc $R[X_0, \dots, \hat{X_i}, \dots, X_n] \xrightarrow{\sim} R$ en prenant les sections globales,

mais $X_j \notin R$ par construction des polynômes : contradiction.
$(j \neq i)$

Donc le schéma $\mathbb{P}^n_R$, $n \geq 1$, n'est pas affine.

5_ Recollements, produits

cf. Hartshorne exemple 2.3.5 et exercice 2.12
Mumford chap II. 2
EGA 1 chap 1 p 106-107

Prop : Soient X et Y deux schémas, soient $U \subset X$ et $V \subset Y$ des ouverts, et soit $\varphi : (U, \mathcal{O}_X|_U) \xrightarrow{\sim} (V, \mathcal{O}_Y|_V)$ un isomorphisme de schémas. Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (U, \mathcal{O}_X|_U) & \longrightarrow & X \\ \downarrow \wr & & \\ (V, \mathcal{O}_Y|_V) & \longrightarrow & Y \end{array}$$

a une colimite dans la catégorie des schémas, appelée recollement de X et Y le long de U et V.

NB : En général, les colimites (même finies) n'existent pas dans la catégorie des schémas.

□ Soit L la colimite (limite inductive) du diagramme

$$\begin{array}{ccc} U & \hookrightarrow & X \\ \downarrow \wr & & \\ V & \hookrightarrow & Y \end{array}$$

dans la catégorie des espaces topologiques,

i.e. $L = X \amalg Y / (x \sim \varphi(x) \text{ pour tout } x \in U)$ muni de $\iota_X : X \hookrightarrow L$, $\iota_Y : Y \hookrightarrow L$

On définit le faisceau structural $\mathcal{O}_L$ par

$$\mathcal{O}_L(W) = \left\{ (s, s') \in \mathcal{O}_X(\iota_X^{-1}(W)) \times \mathcal{O}_Y(\iota_Y^{-1}(W)) \;/\; \varphi^\#(s'|_{\iota_Y^{-1}(W) \cap V}) = s|_{\iota_X^{-1}(W) \cap U} \right\}$$

Par construction, $(L, \mathcal{O}_L)$ est un espace localement annelé. De plus, X et Y sont des schémas. Montrons que L est un schéma, i.e. que tout point de L a un voisinage affine.

Par restriction, il suffit de le montrer dans le cas où X est affine et $V = Y$, et dans ce cas $(L, \mathcal{O}_L) \simeq (X, \mathcal{O}_X)$ par définition.

Si L' est un autre cocône, on a

$$\begin{array}{ccccc} (U, \mathcal{O}_X|_U) & \longrightarrow & (X, \mathcal{O}_X) & \xrightarrow{\iota'_X} & \\ \downarrow & & & & (L', \mathcal{O}_{L'}) \\ (V, \mathcal{O}_Y|_V) & \longrightarrow & (X, \mathcal{O}_X) & \xrightarrow{\iota'_Y} & \end{array}$$

donc

$$\begin{array}{ccccc} U & \hookrightarrow & X & & \\ \downarrow & & & \searrow & \\ & & & & L \longrightarrow L' \\ V & \hookrightarrow & Y & \nearrow & \end{array}$$

sur les espaces topologiques.

Si $s \in \mathcal{O}_{L'}(W)$, on a $\iota_X'^{\#}(s) \in \mathcal{O}_X(\iota_X'^{-1}(W))$

$\iota_Y'^{\#}(s) \in \mathcal{O}_Y(\iota_Y'^{-1}(W))$

et $\iota_X'^{\#}(s)|_{\iota_X'^{-1}(W) \cap U} = \varphi^{\#}\left(\iota_Y'^{\#}(s)|_{\iota_Y'^{-1}(W) \cap V}\right)$

donc $\left(\iota_X'^{\#}(s), \iota_Y'^{\#}(s)\right) \in \mathcal{O}_L\left(\text{image de } \iota_X^{-1}(W) \cup \iota_Y^{-1}(W) \text{ dans } L\right)$

et on obtient bien un morphisme d'espaces localement annelés. ☒

Notons que $(X, \mathcal{O}_X)$ est isomorphe à la restriction de $(L, \mathcal{O}_L)$ à l'ouvert image de ι_X, et de même pour Y.

De la même manière, on peut montrer une propriété de recollement plus générale : étant donnés

- $(X_i)_{i \in I}$ des schémas
- $\forall i \neq j \quad U_{ij} \subseteq X_i$ ouvert
- $\forall i \neq j \quad \varphi_{ij} : U_{ij} \longrightarrow U_{ji}$ isomorphismes de schémas

  tq $\varphi_{ji} = \varphi_{ij}^{-1}$ $(\forall i \neq j)$

  et $\varphi_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik}) = U_{ji} \cap U_{jk}$ $(\forall i, j, k$ distincts$)$

  et $\varphi_{ik}|_{U_{ij} \cap U_{ik}} = \varphi_{jk}|_{U_{ji} \cap U_{jk}} \circ \varphi_{ij}|_{U_{ij} \cap U_{ik}}$ (idem)

alors il existe un schéma X qui soit colimite du tricône, et les morphismes $X_i \longrightarrow X$ induisent des isomorphismes de X_i sur des ouverts de X, qui recouvrent X.

Exercice : Vérifier que $\mathbb{P}^n_R$ est le recollement des

$X_i = \mathbb{A}^n_R = \operatorname{Spec} R[x_0, \dots, \hat{x_i}, \dots, x_n]$

le long des ouverts $U_{ij} = D(x_j) \subseteq X_i$.

Prop (recollement de morphismes) :

Si S est un schéma, et si X et Y sont des S-schémas, si $(U_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts de X qui recouvrent X, si $f_i : (U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i}) \longrightarrow Y$ sont des morphismes de S-schémas tels que $\forall i,j \quad f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$, alors il existe un morphisme de S-schémas $f : X \longrightarrow Y$ tel que $\forall i \quad f|_{U_i} = f_i$.

□ On a une application continue $f : X \to Y$ par recollement immédiat.

Si V est un ouvert de Y, on a

$$f^\#(V) : \mathcal{Y}(V) \longrightarrow \mathcal{X}\big(\underbrace{f^{-1}(V)}_{= U_i \cap f^{-1}(V)}\big)$$

Si $s \in \mathcal{O}_Y(V)$, alors $f_i^\#(s)|_{U_i \cap U_j \cap f^{-1}(V)} = (f_i|_{U_i \cap U_j})^\#(s)$

$= (f_j|_{U_i \cap U_j})^\#(s)$

$= f_j^\#(s)|_{U_i \cap U_j \cap f^{-1}(V)}$

donc les $f_i^\#(s)$ se recollent (de manière unique) en un $f^\#(s) \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$.

On obtient ainsi $f : X \to Y$ qui vérifie bien les propriétés annoncées. □

Prop : Soit S un schéma, et soient X et Y des S-schémas.
Le produit fibré $X \times_S Y$, i.e. la limite du diagramme

$X \to S \leftarrow Y$

existe dans la catégorie des schémas. (et c'est un S-schéma !)

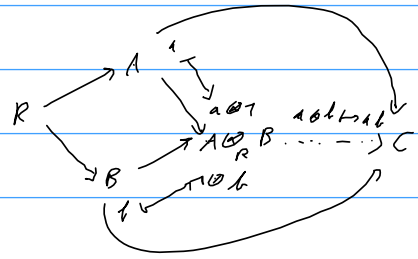
NB : On a unicité à isomorphisme près, comme conséquence de la propriété universelle.

Preuve dans le cas affine

Si X, Y, S sont affines, cela revient à montrer l'existence d'une colimite pour un diagramme

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \\ B & & \end{array}$$

dans la catégorie des anneaux. Elle existe, c'est l'anneau $A \otimes_R B$.



$X \times_S Y$

On en déduit l'existence du produit fibré dans la catégorie des schémas affines, puis (par vérification directe) dans la catégorie des schémas.

Preuve dans le cas où S est affine

On suppose d'abord que S et Y sont affines.

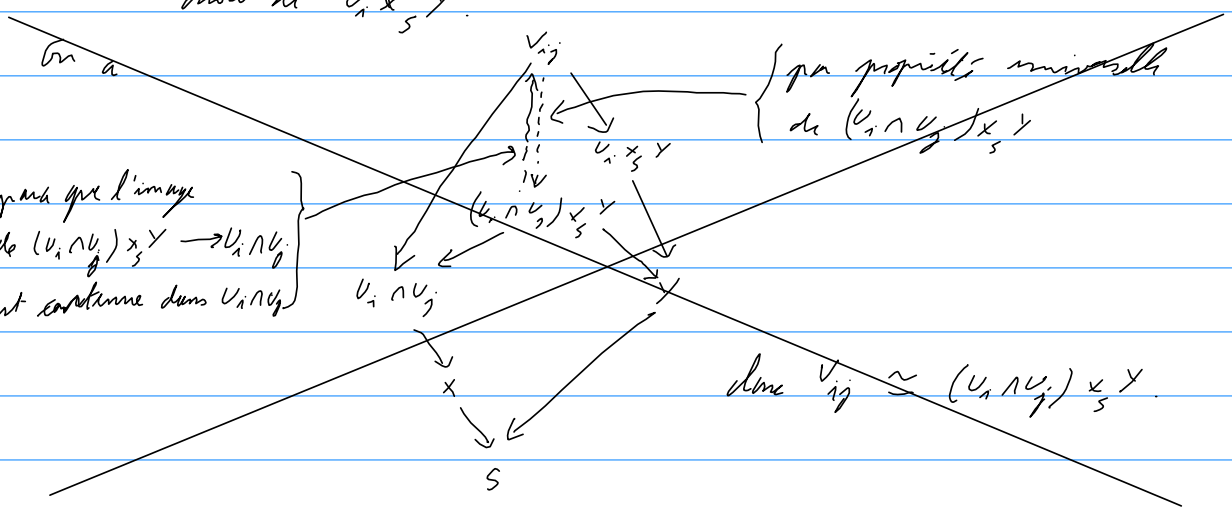
Le schéma X est recouvert par des ouverts affines U_i.

Par le cas affine, on a des produits fibrés $U_i \times_S Y$.

Soit V_{ij} l'image réciproque de $U_i \cap U_j$ par $U_i \times_S Y \longrightarrow U_i$

↳ ouvert de $U_i \times_S Y$.

On suppose en fait ici que X est recouvert par des ouverts U_i et des ouverts que des produits $U_i \times_S Y$ existent. On veut en déduire l'existence de $X \times_S Y$.



réécriture du cas S, Y affines, X quelconque — 2026-04-25

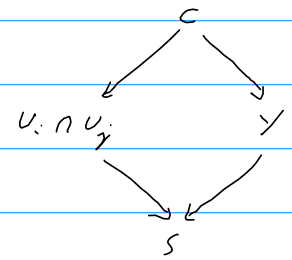
X est recouvert par des ouverts affines U_i.
On a montré l'existence des produits fibrés $U_i \times_S Y$.
On note V_{ij} l'image réciproque de $U_i \cap U_j$ par

$$U_i \times_S Y \longrightarrow U_i$$

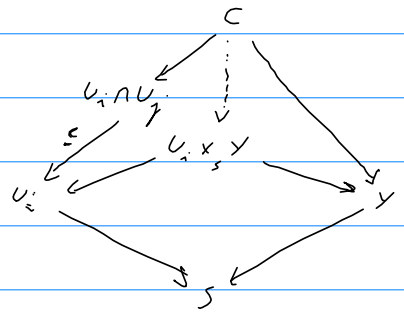
(donc $V_{ij} \subseteq U_i \times_S Y$, et $U_i \times_S Y \longrightarrow U_i$ se restreint en $V_{ij} \longrightarrow U_i \cap U_j$).

V_{ij} muni de la structure de schéma $\mathcal{O}_{U_i \times_S Y}|_{V_{ij}}$

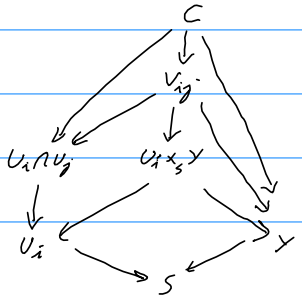
Montrons que V_{ij} est le produit fibré $(U_i \cap U_j) \times_S Y$ (et donc que celui-ci existe).
Soit un cône



on a



et de plus l'image de $C \longrightarrow U_i \times_S Y \longrightarrow U_i$ est aussi celle de $C \longrightarrow U_i \cap U_j \subseteq U_i$ donc est dans l'ouvert $U_i \cap U_j$. Par définition de V_{ij}, le morphisme $C \longrightarrow U_i \times_S Y$ a son image dans V_{ij}, donc on trouve un morphisme $C \longrightarrow V_{ij}$ tel que

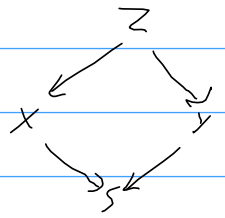


commute. Ceci montre bien que V_{ij} est le produit fibré $(U_i \cap U_j) \times_S Y$.

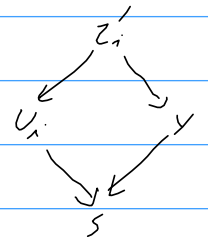
Soit $\varphi_{ij} : V_{ij} = (U_i \cap U_j) \times_S Y \simeq (U_j \cap U_i) \times_S Y = V_{ji}$

Les morphismes φ_{ij} vérifient les propriétés requises pour le recollement. On en déduit un schéma Z qui recolle les $U_i \times_S Y$ le long de φ_{ij}

Par recollement des morphismes, on a



et si Z' est un autre cône on a



avec Z'_i l'image réciproque de U_i par $Z' \longrightarrow X$.

donc $Z'_i \longrightarrow U_i \times_S Y \longrightarrow Z$

puis, par recollement des morphismes, $Z' \longrightarrow Z$ qui fait commuter le diagramme. Donc Z est le produit fibré $X \times_S Y$.

Le raisonnement précédent n'utilise le fait que Y est affine que pour montrer l'existence des $U_i \times_S Y$. On peut donc procéder de même en échangeant X et Y pour montrer l'existence de $X \times_S Y$ en supposant seulement que S est affine.

fin du cours n°6 (L026-09-25)

Cas général

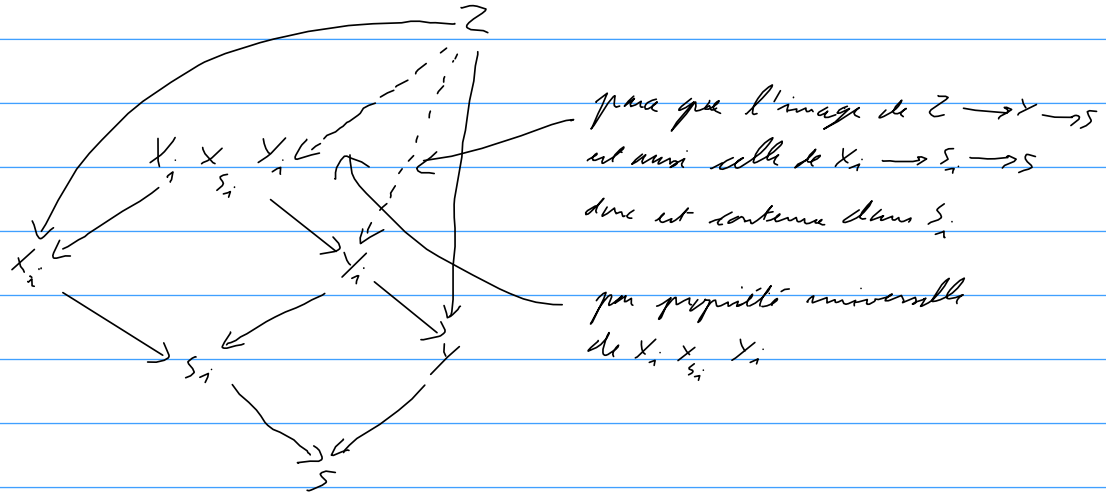
Soit (S_i) un recouvrement de S par des ouverts affines.

Soient X_i = image réciproque de S_i par $X \longrightarrow S$

Y_i = ____ $Y \longrightarrow S$.

On a montré l'existence des $X_i \times_{S_i} Y_i$.

On a



parce que l'image de $Z \to Y \to S$ est aussi celle de $X_1 \to S_1 \to S$ donc est contenue dans S_1.

par propriété universelle de $X_1 \times_{S_1} Y_1$

donc $X_1 \times_{S_1} Y_1$ est le produit fibré $X_1 \times_S Y$.

Par recollement (comme à l'étape précédente, qui n'utilisait le fait que S est affine que pour l'existence), on en déduit l'existence du produit fibré $X \times_S Y$. □

Déf: Si X est un S-schéma, et si $S' \to S$ est un morphisme de schémas, on dit que le S'-schéma $X \times_S S'$ est obtenu par changement de base à partir de X.

Exemple: Si X est un S-schéma, et si $x \in S$ est un point fermé, la fibre S_x est un anneau local, de corps résiduel noté $k(x)$.

$\mathcal{O}_S(U) \longrightarrow S_x \longrightarrow k(x)$ pour tout ouvert $U \ni x$

$\mathrm{Spec}\, k(x) \longrightarrow U \subseteq S$ pour tout ouvert affine $U \ni x$

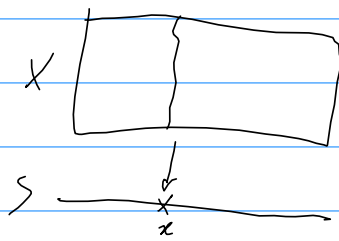
$\mathrm{Spec}\, k(x) \longrightarrow S$ (x comme $k(x)$-point de S)

On en déduit un produit fibré $X \times_S \mathrm{Spec}\, k(x)$ appelé fibre de X en x. C'est un schéma sur $\mathrm{Spec}\, k(x)$, d'espace topologique sous-jacent l'image réciproque de $\{x\}$ par $X \longrightarrow S$.

ne pas confondre avec la fibre S_x

Exemple: $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p$

$X \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}} \mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_p$ = réduction modulo p du schéma X (correspond à $\otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p$ sur les équations).



6 – Premières propriétés des schémas

Déf : Un schéma est connexe si son espace topologique est connexe
_____ irréductible _____ irréductible.

NB : X espace topologique :

- X est connexe ssi $X = U \amalg V$ $\Rightarrow$ $U = X$ ou $V = X$.
  U, V ouverts
- X est irréductible ssi $X = F \cup F'$ $\Rightarrow$ $F = X$ ou $F' = X$.
  F, F' fermés

Exemple de non irréductible : $\{P = 0\}$ avec P qui se factorise non trivialement.

Prop : Le schéma $X = \operatorname{Spec} A$ est irréductible ssi son nilradical ($\sqrt{(0)}$ = ensemble des nilpotents + 0) est premier.

NB : $\sqrt{(0)}$ est l'intersection des idéaux premiers de A, i.e. $Z(f) = A \Leftrightarrow f$ nilpotent (ou nul)

□ • Si X est irréductible, soient $f, g \in A$ t.q. fg soit nilpotent. Alors $\underbrace{Z(fg)}_{= Z(0) = X} = \underbrace{Z(f)}_{\text{fermé}} \cup \underbrace{Z(g)}_{\text{fermé}}$ donc $Z(f) = X$ ou $Z(g) = X$.

On peut supposer $Z(f) = X = Z(0)$, alors $f \in \sqrt{(0)}$ i.e. f est nilpotent (ou nul).
Donc $\sqrt{(0)}$ est premier.

• Si $\sqrt{(0)}$ est premier, supposons $X = Z(\mathfrak{a}) \cup Z(\mathfrak{a}')$, et soit $\mathfrak{p} := \sqrt{(0)} \in X$. On peut supposer $\mathfrak{p} \in Z(\mathfrak{a})$, i.e. $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$. Or $\mathfrak{p} = \sqrt{(0)}$ est contenu dans tous les idéaux premiers de A, donc $Z(\mathfrak{a}) = X$. ∎

(reformulation : $\mathfrak{p} = \sqrt{(0)}$ est un point (car idéal premier) dense (car contenu dans tous les idéaux premiers), donc si $X = F \cup F'$ (F et F' fermés), on peut supposer $\mathfrak{p} \in F$, et alors $F = X$ car $\mathfrak{p}$ est dense dans X et F est fermé.)

(ajout 2026-09-28)

Prop : Un schéma X est irréductible ssi il a un point dense.

□ $\Leftarrow$: Si $x \in X$ est dense, et si $X = F \cup F'$ (F, F' fermés)

alors on peut supposer $x \in F$, et alors $F = X$ car $\{x\}$ est dense dans X.

$\Rightarrow$ Soit X un schéma irréductible, et soit U un ouvert affine non vide de X. Montrons que U est irréductible.

Si $U = (F \cap U) \cup (F' \cap U)$ pour F, F' fermés de X,

alors $X = F \cup F' \cup \underbrace{(X \setminus U)}_{\text{fermé}}$,

or X est irréductible, donc $F = X$ ou $F' = X$ ou $U = \emptyset$.

(donc $U = F \cap U$; donc $U = F' \cap U$; non)

Donc U est irréductible, donc $\mathcal{O}_X(U) \simeq \sqrt{(0)}$ est premier

et donc dans U. Notons $x \in U$ le point correspondant.

$\overline{\{x\}}$ est un fermé non vide de X, or X est irréductible

donc $\overline{\{x\}} = X$. Donc x est dense dans X. □

Prop : Tout ouvert d'un espace topologique irréductible est irréductible.

Rem : S'il existe, ce point dense est unique, et est dans tous les ouverts.

□ Soit U un ouvert de X, et soit $x \in X$ dense.

Si $x \notin U$, alors $x \in \underbrace{X \setminus U}_{\text{fermé}}$ donc $X \setminus U = X$ donc $U = \emptyset$.

Le point dense est donc dans tous les ouverts affines.

Or si $\operatorname{Spec} A$ est un ouvert affine, un point dense est un minimum (pour $\subseteq$) dans l'ensemble des idéaux premiers, donc est unique. □

Déf : Un schéma X est <u>réduit</u> si pour tout ouvert U l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$ n'a pas de nilpotent ($\neq 0$).

↳ On dit que l'anneau est réduit.

Prop : Le schéma $X = \operatorname{Spec} A$ est réduit ssi l'anneau A est réduit (i.e. A n'a pas de nilpotent $\neq 0$, i.e. $\sqrt{(0)} = (0)$).

□ $\Rightarrow$: par définition, et $A = \mathcal{O}_X(X)$.

$\Leftarrow$: Si A est réduit, alors les localisés A_f sont réduits (exercice),

donc $\mathcal{O}_X(U) = \varprojlim_{D(f) \subseteq U} A_f$ est réduit. □

si $\frac{a}{f^m}$ est nilpotent, alors a est nilpotent (dans A_f)
donc $\exists n \geq 2 \ \exists s \geq 0 \ a^n f^{ns} = 0$ dans A
donc af est nilpotent dans A
($af \neq 0$ car $\forall s \geq 0 \ af^s \neq 0$ dans A sinon on aurait $a = 0$ dans A_f).

Prop : Un schéma X est réduit ssi ses fibres sont des anneaux réduits.

□ Si X n'est pas réduit, soit $f = \mathcal{O}_X(U)$ nilpotent $f \neq 0$ et $f^n = 0$ ($n \geq 2$)

Voir la remarque ci-dessous pour une autre méthode.

Si $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de U par des ouverts, alors l'un des $\mathcal{O}_X(U_i)$ contient un $f|_{U_i}$ nilpotent, car sinon on aurait $f|_{U_i}^1 = 0$ donc $f|_{U_i} = 0$, donc $f = 0$ par recollement.

On peut supposer les U_i affines (car tout ouvert d'un schéma affine est recouvert par des ouverts distingués, qui sont des sous-schémas affines).

On est donc ramené au cas où $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ est un schéma affine non réduit.

Si A $(= \mathcal{O}_X(U))$ est un anneau, et si $f \in A$ est nilpotent (non nul), il s'agit de montrer qu'il existe un $\wp$ idéal premier de A tel que f soit nilpotent $(\neq 0)$ dans $A_\wp$.

Soit $I := \ker \left(\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\times f} & A \\ x & \longmapsto & xf \end{array} \right)$. C'est un idéal de A, non nul (contient f^{n-1}), différent de A (car $f \neq 0$).

Il est donc contenu dans un idéal premier $\wp$.

Si $y \in A \setminus \wp$, on a $yf \neq 0$ par construction, donc f est non nul dans le localisé $A_\wp$ (et $f^n = 0$ donc c'est bien un nilpotent de $A_\wp$).

Réciproquement, si $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ est nilpotent, il existe un ouvert $U \ni x$ et $g \in \mathcal{O}_X(U)$ tels que f est l'image de g dans $\mathcal{O}_{X,x}$.

Comme $f^n = 0$, on a $g^n = 0$ dans $\mathcal{O}_{X,x}$,

donc (quitte à restreindre U) $g^n = 0$ dans $\mathcal{O}_X(U)$.

Donc $\mathcal{O}_X(U)$ contient un nilpotent. ∎

(ajout 2026-04-28)

X schéma. On considère le morphisme d'anneaux

$$\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{O}_{X,x}$$

Il est injectif. En effet, si $f \in \ker(\_\_)$, alors

$\forall x \in U \quad \exists V_x$ ouvert t.q. $x \in V_x \subseteq U \quad f|_{V_x} = 0$.

On a $\forall x \in U \quad f|_{V_x} = 0|_{V_x}$, et $\bigcup_{x \in U} V_x = U$

donc $f = 0$ par unicité du recollement.

En particulier, si $\mathcal{O}_{X,x}$ est réduit pour tout $x \in U$, alors $\mathcal{O}_X(U)$ est réduit.

(autre ajout 2026-09-28)

Soient X un schéma, U un ouvert de X, $s \in \mathcal{O}_X(U)$ tels que $D(s) = \emptyset$. Si V est un ouvert affine contenu dans U, alors $D(s) \cap V = \emptyset$ donc s est nilpotent dans $\mathcal{O}_X(V)$.

(En particulier, si U est quasi-compact, on peut en déduire que s est nilpotent. Si $V \subseteq U$ est ouvert et quasi-compact, alors $s|_V$ est nilpotent.)

L'image de s dans toutes les fibres $\mathcal{O}_{X,x}$, $x \in U$, est donc nilpotente ou nulle.

Si X est un schéma réduit, on a $D(s) = \emptyset \Rightarrow s = 0$ (puisque $\mathcal{O}_X(V)$ est réduit).

Déf : Un schéma X est <u>intègre</u> si pour tout ouvert U de X l'anneau $\mathcal{O}_X(U)$ est intègre.

Prop : Un anneau A est intègre ssi son idéal (0) est premier.

Prop : Un schéma X est intègre ssi il est irréductible et réduit.

Prop : Un schéma affine $\operatorname{Spec} A$ est intègre ssi l'anneau A est intègre.

démontré

($\operatorname{Spec} A$ irréductible $\Leftrightarrow \sqrt{(0)}$ premier)

fin du cours n°7 (2026-09-28)

□ Si X est intègre, pour tout ouvert U, $\mathcal{O}_X(U)$ est intègre donc réduit. Donc X est réduit.

Si X n'est pas irréductible, il existe des ouverts non vides U et U' avec $U \cap U' = \emptyset$. On peut donc trouver une section dans $\mathcal{O}_X(U \cup U')$ qui vaut 1 sur U et 0 sur U' (par recollement) et une section s' qui vaut 0 sur U et 1 sur U'. On a $ss' = 0$, donc $\mathcal{O}_X(U \cup U')$ n'est pas intègre.

Réciproquement, si X est irréductible et réduit, soit U un ouvert de X. Alors U est irréductible et $\mathcal{O}_X(U)$ est réduit. Si $f, g \in \mathcal{O}_X(U)$ vérifient $fg = 0$, alors $D(f)$ et $D(g)$ sont des ouverts (contenus dans U) qui vérifient $D(f) \cap D(g) = D(fg) = D(0) = \emptyset$. Comme U est irréductible, on a $D(f) = \emptyset$ ou $D(g) = \emptyset$. Si $D(f) = \emptyset$, alors f_h est nilpotent dans tout ouvert affine V contenu dans U. Comme X est réduit, on a $f_h = 0$. Par recollement, on a $f = 0$. ■

Rem :
- $\operatorname{Spec} k[X]/(X^2-1)$ est réductible et réduit. (deux points)
- $\operatorname{Spec} k[X]/(X^2)$ est irréductible mais pas réduit. (« point double »)
- $\operatorname{Spec} k[X]/(X)$ est intègre. (un point simple)

7 - Propriétés de finitude

Déf : Un schéma X est quasi-compact si son espace top. est quasi-compact, i.e. de tout recouvrement de X par des ouverts on peut extraire un recouvrement fini.

Rem : • Les schémas affines sont quasi-compacts.

• Si U est un ouvert quasi-compact d'un schéma X,
X est réunion d'ouverts affines,
donc U est réunion d'ouverts d'ouverts affines,
tout ouvert d'un schéma affine est réunion d'ouverts distingués, qui sont affines,
donc U est réunion d'ouverts affines,
donc U est réunion finie d'ouverts affines.

Réciproquement, les réunions finies d'ouverts affines sont des ouverts quasi-compacts (car une réunion finie de quasi-compacts est quasi-compacte).
Les ouverts quasi-compacts d'un schéma sont donc les réunions finies d'ouverts affines.

• Un fermé d'un quasi-compact est quasi-compact.

NB : Il y a des propriétés de finitude de nature topologique (quasi-compact, quasi-séparé) et des propriétés de finitude locales de nature algébrique (localement noethérien, localement de présentation finie, etc), qui peuvent être combinées ensemble (schéma noethérien, morphisme de présentation finie, etc).

Déf : Un schéma X est **localement noethérien** s'il peut être recouvert par des ouverts affines d'anneaux associés noethériens.

Déf : Un schéma X est **noethérien** s'il peut être recouvert par un nombre fini d'ouverts affines d'anneaux associés noethériens.

Rem : noethérien $\iff$ quasi-compact + localement noethérien.

Prop : Un schéma X est localement noethérien ssi **tous** ses ouverts affines viennent d'anneaux noethériens.

$\Leftarrow$: immédiat

$\Rightarrow$: X est recouvert par des ouverts affines U_i venant d'anneaux noethériens. Si U est un ouvert de X, alors U est recouvert par les $U \cap U_i$, qui sont des ouverts des ouverts affines U_i, donc sont recouverts par des ouverts distingués $D(f_{ij}) \subset U_i$, qui sont affines noethériens (si A est noethérien, tout idéal de A_f est associé à un idéal de A (image inverse par $A \to A_f$) donc est engendré par un nbre fini d'éléments).
Donc U est localement noethérien.

Quitte à restreindre à U, on peut donc supposer

$X = U = \operatorname{Spec} A$ localement noethérien.

de même $X = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$ $\quad f_i \in A$

A_{f_i} noethérien.

Comme $X = \operatorname{Spec} A$ est quasi-compact, on peut supposer I fini

$I = \{0, \dots, \ell - 1\}$.

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de A. Notons $\mathfrak{a}_{f_i}$ l'image de $\mathfrak{a}$ dans A_{f_i}

(i.e. l'idéal engendré dans A_{f_i} par l'image de $\mathfrak{a}$ par $A \to A_{f_i}$).

Pour tout $i \in I$, comme A_{f_i} est noethérien,

l'idéal $\mathfrak{a}_{f_i}$ est engendré par un nombre fini d'éléments $\left(\frac{g_{ij}}{f_i^{n_i}}\right)_{j \in J_i}$

Quitte à les multiplier par une puissance de f_i, on peut supposer

$g_{ij} \in \mathfrak{a}$. Soit $G = \{ g_{ij} \,;\, j \in J_i,\ i \in I \} \subseteq \mathfrak{a}$.

Montrons que G engendre $\mathfrak{a}$ comme idéal de A.

Soit $\Phi : \begin{cases} A^G \longrightarrow \mathfrak{a} \\ (a_g)_{g \in G} \longmapsto \sum_{g \in G} a_g g \end{cases}$ C'est une application A-linéaire.

Par $\otimes_A A_{f_i}$, elle induit $\begin{cases} A_{f_i}^G \longrightarrow \mathfrak{a}_{f_i} \\ (a_g)_{g \in G} \longmapsto \sum_{g \in G} a_g g \end{cases}$ qui est surjective.

i.e. $\operatorname{coker}\left(\Phi \otimes_A A_{f_i}\right) = 0$

donc $\operatorname{coker}(\Phi) \otimes_A A_{f_i} = 0$ puisque $\otimes_A A_{f_i}$ (qui est un adjoint à gauche) commute aux colimites.

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Comme $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$,

il existe un $i \in I$ tel que $\mathfrak{p} \in D(f_i)$

i.e. $f_i \notin \mathfrak{p}$,

et $A_{\mathfrak{p}}$ est alors un localisé de A_{f_i},

donc $\operatorname{coker}(\Phi) \otimes_A A_{\mathfrak{p}} = \left(\operatorname{coker}(\Phi) \otimes_A A_{f_i}\right) \otimes_{A_{f_i}} A_{\mathfrak{p}} = 0$.

Soit $x \in \operatorname{coker} \Phi$. Notons $\mathfrak{b}_x$ l'idéal annulateur de x dans A, i.e.

$$\mathfrak{b}_x := \{ a \in A \mid ax = 0 \}.$$

Si $\mathfrak{b}_x \subsetneq A$, il existerait un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A tel que $\mathfrak{b}_x \subset \mathfrak{p}$.

Or $\operatorname{coker}(\Phi) \otimes A_{\mathfrak{p}} = 0$ donc $\exists b \in A \setminus \mathfrak{p}$ $bx = 0$,

i.e. $b \in \mathfrak{b}_x \setminus \mathfrak{p} = \emptyset$: contradiction.

Donc $\mathfrak{b}_x = A$, donc $x = 0$.

Donc $\operatorname{coker} \Phi = 0$, donc Φ est surjective, donc G engendré or,

or G est fini. L'anneau A est donc noethérien. □

Corollaire : Un schéma affine $\operatorname{Spec} A$ est (localement) noethérien ssi l'anneau A est noethérien.

NB : « séparé » va être défini plus loin.

Déf : Un schéma X est quasi-séparé si toute intersection de deux ouverts quasi-compacts de X est quasi-compacte.

Prop : Un schéma X est quasi-séparé si toute intersection de deux ouverts affines de X est quasi-compacte.

□ $\Rightarrow$: car affine $\Rightarrow$ quasi-compact

$\Leftarrow$: car tout ouvert quasi-compact est réunion finie d'ouverts affines, et toute réunion finie de quasi-compacts est quasi-compacte. □

Prop : Si X est quasi-séparé, tout ouvert de X est quasi-séparé.

i.e. c'est une propriété locale.

□ car les ouverts affines d'un ouvert de X sont des ouverts affines de X. □

Rem : Un schéma affine est quasi-compact et quasi-séparé.

▷ Déjà vu pour quasi-compact.

Soit $X = \mathrm{Spec}\, A$ un schéma affine,
soit U, V deux ouverts affines de X.
Comme X est affine, l'ouvert U est réunion d'ouverts $D(f_i)$.
Comme U est affine, il est quasi-compact, donc U est réunion finie d'ouverts $D(f_{i_k})$, qui sont affines ($\mathrm{Spec}\, A_{f_i}$).
De même, V est réunion finie d'ouverts affines $D(g_j)$.
Comme une réunion finie de quasi-compacts est quasi-compacte, on est ramené au cas de deux ouverts affines $D(f)$ et $D(g)$, or $D(f) \cap D(g) = D(fg)$ est affine, donc quasi-compact. ☒

fin du cours n°8 (2026-09-30)

Prop : Si X est un schéma, alors X est quasi-séparé ssi

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i \quad \text{avec } U_i \text{ ouverts quasi-compacts quasi-séparés}$$

t.q. $\forall i,j \in I \quad U_i \cap U_j$ quasi-compact.

Rem : on peut prendre U_i ouverts affines

Lemme : Si $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ avec U_i ouverts quasi-compacts et quasi-séparés t.q. $\forall i,j \in I \quad U_i \cap U_j$ quasi-compact
et si U ouvert quasi-compact,
alors $\forall i \in I \quad U \cap U_i$ est quasi-compact.

▷ $U = \bigcup_{i \in I} (U \cap U_i)$ (ouverts) et U quasi-compact

donc $\exists I' \subseteq I$ fini $\quad U = \bigcup_{i \in I'} (U \cap U_i)$.

Si $x \in U$, $\exists i(x) \in I' \quad x \in U \cap U_{i(x)}$

et $\exists V_x$ ouvert affine de $X \quad x \in V_x \subseteq U \cap U_{i(x)}$

On a $U = \bigcup_{x \in U} V_x$ et U quasi-compact

donc $\exists J \subseteq U$ fini $\quad U = \bigcup_{x \in J} V_x$.

On a alors $U \cap U_i = \bigcup_{x \in J} V_x \cap U_i$

$$= \Big(\bigcup_{\substack{x \in J \\ \text{t.q. } i(x) = i}} V_x \cap U_i \Big) \cup \Big(\bigcup_{\substack{x \in J \\ \text{t.q. } i(x) \neq i}} V_x \cap U_i \Big)$$

- Si $x \in J$ et $i(x) = i$, alors $V_x \subseteq U \cap U_i$
  donc $V_x \cap U_i = V_x$ affine donc quasi-compact.
- Si $x \in J$ et $i(x) \neq i$, alors $V_x \subseteq U \cap U_{i(x)}$
  donc $V_x \cap U_i = V_x \cap U_{i(x)} \cap U_i$,
  or $\begin{cases} V_x \subseteq U_{i(x)} & \text{et } V_x \text{ est quasi-compact} \\ U_{i(x)} \cap U_i \subseteq U_{i(x)} & \text{et } U_{i(x)} \cap U_i \text{ est quasi-compact} \\ U_{i(x)} \text{ est quasi-séparé} \end{cases}$
  donc $V_x \cap U_{i(x)} \cap U_i$ est quasi-compact.

Donc $U \cap U_i$ est réunion finie de quasi-compacts,
donc $U \cap U_i$ est quasi-compact. □

Preuve de la proposition :

$\Rightarrow$: $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ U_i ouverts affines.
donc quasi-compacts et quasi-séparés
$\forall i,j \in I$ $U_i \cap U_j$ est quasi-compact
car X est quasi-séparé.

$\Leftarrow$: U, U' ouverts quasi-compacts de X
D'après le lemme, $\forall i \in I$ $U \cap U_i$ est quasi-compact.
Si U est affine, alors U est aussi quasi-séparé,
donc la famille $(V_i)_{i \in I \amalg \{\bullet\}}$ avec $V_i = U_i$ si $i \in I$, $V_\bullet = U$
vérifie aussi les hypothèses du lemme,
donc $\forall i \in I \amalg \{\bullet\}$ $U' \cap V_i$ est quasi-compact.
En particulier (avec $i = \bullet$), $U \cap U'$ est quasi-compact.

Dans le cas général, $U = \bigcup_{j \in J} W_j$ W_j ouverts affines

U est quasi-compact donc on peut supposer J fini.

D'après le cas précédent, $W_j \cap U'$ est quasi-compact,

or $U \cap U' = \bigcup_{j \in J} (W_j \cap U')$, donc $U \cap U'$ est quasi-compact. □

(J fini ; $W_j \cap U'$ quasi-compacts)

<u>Corollaire</u> : Un schéma X est quasi-compact et quasi-séparé ssi il est réunion finie d'ouverts affines U_i t.q. les $U_i \cap U_j$ soient quasi-compacts.

□ $\Rightarrow$: $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ U_i ouverts affines

X est quasi-compact donc on peut supposer I fini.

X est quasi-séparé donc $U_i \cap U_j$ quasi-compact.

$\Leftarrow$: D'après la proposition, X est quasi-séparé.

De plus, X est réunion finie de quasi-compacts

donc X est quasi-compact. □

Déf : Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme de schémas (i.e. un schéma sur S). On dit que :

- f est <u>quasi-compact</u> si, $\forall V$ ouvert de S, V quasi compact $\Rightarrow f^{-1}(V)$ quasi-compact.
- f est <u>quasi-séparé</u> si, $\forall V$ ouvert de S, V quasi-séparé $\Rightarrow f^{-1}(V)$ quasi-séparé.

Prop : On a équivalence de :

(i) f est quasi-compact

(ii) $\forall$ ouvert affine V de S, $f^{-1}(V)$ est quasi-compact

(iii) S peut être recouvert par des ouverts affines V_i tels que $\forall i$ $f^{-1}(V_i)$ soit quasi-compact.

□ (i) $\Rightarrow$ (ii) car les schémas affines sont quasi-compacts

(ii) $\Rightarrow$ (iii) car tout schéma peut être recouvert par des ouverts affines.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : Soit U ouvert quasi-compact de S.

$S = \bigcup_{i \in I} U_i$ $\quad U_i$ ouvert affine

$f^{-1}(U_i)$ quasi-compact

On veut montrer que $f^{-1}(U)$ est quasi-compact.

Comme U est réunion finie d'ouverts affines de S,

il suffit de le montrer quand U est affine.

Pour tout $x \in U$, il existe un $i \in I$ tel que $x \in U_i$,

donc $x \in \underbrace{U \cap U_i}_{\text{ouvert de } U_i}$, donc il existe un ouvert

distingué W_x de U_i tel que $x \in W_x \subseteq U \cap U_i$ $\quad W_x$ est affine.

On a $U = \bigcup_{x \in U} W_x$, et U est affine donc quasi-compact,

donc $\exists J \underset{\text{fini}}{\subseteq} U$ $\quad U = \bigcup_{x \in J} W_x$.

Comme $f^{-1}(U_i)$ est quasi-compact, on a $f^{-1}(U_i) = \bigcup_{j \in I_i} V_{ij}$

V_{ij} affines

Si $W_x \subseteq U_i$, on a $f^{-1}(W_x) \subseteq \bigcup_{j \in I_i} V_{ij}$ $\quad I_i$ fini

$W_x = D(s)$ pour $s \in \mathcal{O}_S(U_i)$

$f^{-1}(W_x) \cap V_{ij} = \underbrace{D(f^\#(s))}_{\text{ouvert affine}}$ dans V_{ij}

donc $f^{-1}(W_x)$ est réunion finie d'ouverts affines,

or $U = \bigcup_{x \in J} W_x$ est réunion finie de W_x,

donc $f^{-1}(U)$ est réunion finie d'ouverts affines,

donc $f^{-1}(U)$ est quasi-compact. □

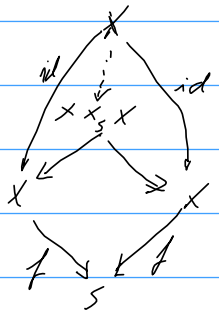
Rem : Si S est affine, alors $f : X \longrightarrow S$ est quasi-compact ssi X l'est.

En particulier, X est quasi-compact ssi $X \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ l'est.

De même, si S est affine, alors $f : X \to S$ est quasi-séparé ssi X l'est.

Prop : Soit $f : X \longrightarrow S$ un morphisme de schémas.
Alors on a

Comparer avec la séparation en topologie : X séparé ssi la diagonale est un fermé de $X \times X$.



Le morphisme $\Delta_f : X \longrightarrow X \times_S X$ ainsi défini est appelé morphisme diagonal. On a alors équivalence de :

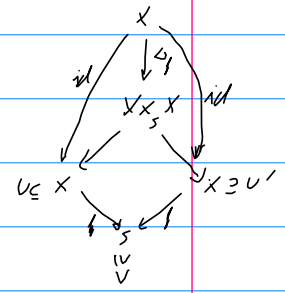
(i) Δ_f est quasi-compact

(ii) $\forall U$ ouvert affine de S, $f^{-1}(U)$ est quasi-séparé.

(iii) Il existe un recouvrement $S = \bigcup_{i \in I} U_i$ U_i ouverts affines t.q. $\forall i$ $f^{-1}(U_i)$ soit quasi-séparé.

□ (i) $\Rightarrow$ (iii) U ouvert affine de S

V, V' ouverts affines de $f^{-1}(U)$



alors $V \times_U V'$ est un ouvert affine de $X \times_S X$,

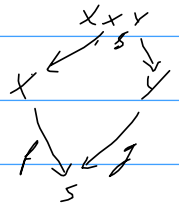
donc $\Delta_f^{-1}(V \times_U V')$ est quasi-compact.

$= V \cap V'$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : car S peut être recouvert par des ouverts affines.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : $f^{-1}(U_i) = \bigcup_{j \in J_i} V_{ij}$ V_{ij} ouverts affines.

Les $V_{ij} \times_{U_i} V_{ij'}$ forment un recouvrement de $X \times_S X$ par des ouverts affines, $\Delta_f^{-1}(V_{ij} \times_{U_i} V_{ij'}) = V_{ij} \cap V_{ij'}$ est quasi-compact car $f^{-1}(U_i)$ est quasi-séparé, donc Δ_f est quasi-compact. ⊛

Prop : Si  avec $X \to S$ quasi-compact

alors $X \times_S Y \to Y$ est quasi-compact.

□ $S = \bigcup U_i$ ouverts affines

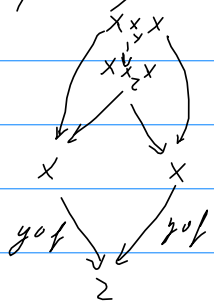
$f^{-1}(U_i) = \bigcup_{\text{finie}} V_{ij}$ V_{ij} ouverts affines

$g^{-1}(U_i) = \bigcup W_{ij'}$

Les $V_{ij} \times_{U_i} W_{ij'}$ sont des ouverts affines qui recouvrent $X \times_S Y$,

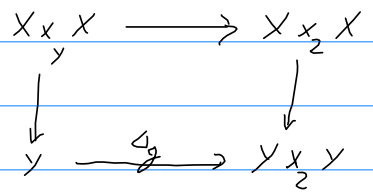
et $\bigcup_{\text{finie}} V_{ij} \times_{U_i} W_{ij'}$ recouvre $X \times_{U_i} W_{ij'}$. ⊠

Prop : Si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ vérifient que Δ_g est quasi-compact, alors



$X \times_Y X \to X \times_Z X$

est quasi-compact.

□ 

On a $X \times_Y X \simeq (X \times_Z X) \times_{X \times_Z X} Y$

(vérifier la propriété universelle)

et Δ_g est quasi-compact. ⊠

Corollaire : Si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ vérifient que Δ_f et Δ_g sont quasi-compacts, alors $\Delta_{g\circ f}$ est quasi-compact.

▷ $\Delta_{g\circ f} : X \xrightarrow{\Delta} X \times_Y X \longrightarrow X \times_Z X$

est composée de quasi-compactes, donc est quasi-compacte. □

Prop : $f : X \to Y$ est quasi-séparé ssi Δ_f est quasi-compact.

▷ $\Rightarrow$: Si U est un ouvert affine de Y,
il est quasi-séparé, donc $f^{-1}(U)$ est quasi-séparé,
donc Δ_f est quasi-compact.

$\Leftarrow$: Soit U un ouvert quasi-séparé de Y.
On a

$$f^{-1}(U) \xrightarrow{\Delta} U \xrightarrow{\ell} \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$$

Or Δ_ℓ est quasi-séparé car U est quasi-séparé
(recouvrement de $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ par un seul ouvert affine)
Δ_f est quasi-compact, donc $f^{-1}(U) \to U$ vérifie la même propriété. Donc $\Delta_{g\circ f}$ est quasi-compacte,
donc $(g\circ f)^{-1}(\operatorname{Spec}\mathbb{Z})$ est quasi-séparé
(= $f^{-1}(U)$, ouvert affine)
i.e. $f^{-1}(U)$ est quasi-séparé.
Donc f est quasi-séparé. □

fin du cours n°9
(2026-10-01)